Cours d'Analyse Première année économie ENSAE

François BOISSON

Le 27 mai 2004

Table des matières

1. Espaces vectoriels Normés

1.1. Rappels des notions usuelles.

1. **R**

(a) Le corps commutatif **R**

R est muni de 2 opérations $+, .$ faisant de **R** un corps commutatif. Les différentes structures algébriques sont

Groupe : Une loi associative, existence d'un élément neutre, tout élément a un opposé

Groupe commutatif ou abélien : La loi est commutative

Notation additive	$G, +$	$x+y$	$k.x$	$-x$	0_G
Notation multiplicative	$G, .$ ou $*$	$x.y$	x^k	x^{-1} ou $\frac{1}{x}$	1_G

Le groupe constitue la structure algébrique fondamentale. La théorie des groupes est particulièrement sophistiquée malgré la simplicité de la définition de cette structure.

Anneau : Deux lois, l'une $+$ faisant de l'ensemble un groupe abélien, l'autre, ., associative, admettant un élément neutre $1 \neq 0$, se distribuant sur l'addition à droite et à gauche.

Unité : Tout élément de A inversible pour la multiplication, exemple : 1 et -1 sont les unités de Z, les polynômes constants sont les unités de $K[X]$, etc.

Diviseur de 0 : Tout couple (x, y) avec $x \neq 0, y \neq 0$ et $xy = 0$. Exemple $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ dans $M(2, \mathbf{R})$

Anneau commutatif : . est commutative

Anneau intègre : Commutatif sans diviseurs de 0

L'intérêt des anneaux intègres est de fournir un cadre à l'arithmétique.

Corps : Un anneau dans lequel tout élément non nul est inversible. Il existe des corps non commutatifs (Quaternions par exemple) mais tout corps fini est commutatif.

Les corps fournissent les scalaires dans les combinaisons linéaires.

(b) Ordre sur **R**

Ordre : **R** est un corps totalement ordonné par $\leqslant$ (défini rigoureusement par $x \leqslant y$ ssi $y - x \in [0, +\infty($, ce dernier est défini lors de la construction de **R**). si $x \leqslant y$ alors $x + z \leqslant y + z$ et, **si $\mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}$**, $x.z \leqslant y.z$

On définit $|x| = \max(x, -x)$

R est archimédien, $\forall x \in \mathbf{R}$, il existe un unique entier $n \in \mathbf{Z}$ tel que

$$n \leqslant x < n + 1$$

On note $n = [x] = E(x)$ soit la partie entière de x. On a

$$x \leqslant y \Rightarrow [x] \leqslant [y] \text{ et surtout}$$
$$m \in \mathbf{Z} \text{ et } m \leqslant x \Rightarrow m \leqslant [x]$$

Remarque : On a

$$-[-x] - 1 < x \leqslant -[-x]$$

(c) Complétude de **R**

Théorème de la borne supérieure : Si $A \neq \varnothing$ majorée, A admet une borne supérieure notée $\sup A$

$$\sup A = \min \{\text{majorant de } A\}$$

On a
$$\Leftrightarrow \begin{cases} M = \sup A \\ M \text{ majore } A \text{ et } \forall \varepsilon > 0,]M - \varepsilon, M] \cap A \neq \varnothing \\ M \text{ majore } A \text{ et } \exists (a_n) \in A^N \text{ convergeant vers } M \end{cases}$$

$\sup A$ peut ne pas appartenir à A. Si $\sup A \in A$, c'est le plus grand élément de A et on le note $\max A$

Conséquence : Toute suite croissante majorée est convergente(cf suites).

(d) Les convexes de $\mathbf{R}$

Segments : Par définition, $[a, b] = \{t.a + (1 - t).b, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$

Convexe : C est convexe ssi $\forall a, b \in C, [a, b] \subset C$

Les intervalles de $\mathbf{R}$ sont les convexes de $\mathbf{R}$. Pour montrer qu'un ensemble A est un intervalle, on montrer donc que
$$\forall x, y \in A, [x, y] \subset A$$

Remarque : Ces définitions se généralisent aux espaces vectoriels.

$[3, 2]$ désigne un segment, $[2, 3]$ un segment ou un intervalle, $]2, 3[$ un intervalle et $]3, 2[$ n'a pas de sens.

2. Les complexes

$\mathbf{C}$ se construit de plusieurs manière, à partir de $\mathbf{R}^2$ (le plus simple) ou bien en considérant les matrices $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$; on pose
$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Un complexe est de la forme
$$z = a + i.b$$

a est la partie réelle de z, b la partie imaginaire.

$\mathbf{C}$ est un corps commutatif, c'est une extension de $\mathbf{R}$ (i.e $\mathbf{R}$ est un sous corps de $\mathbf{C}$)

Module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Complexe de module 1 **:** On note
$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$$

$(\mathcal{U}, .)$ est un sous groupe de $(\mathbf{C}^*, .)$

Notations d'Euler : Si $z \in \mathcal{U}, \exists \theta \in R, z = \cos\theta + i.\sin\theta$, on pose $z = e^{i\theta}$.

Cela permet d'étendre la fonction $x \to e^x$ à $\mathbf{C}$ en conservant ces propriétés usuelles.

Un complexe $z \in \mathbf{C}$ se met sous la forme
$$z = |z|.e^{i\theta}$$

On obtient alors
$$\forall n \in \mathbf{Z}, z^n = |z|^n.e^{in\theta}$$

Cela ne s'étend à $n \in \mathbf{Q}$ ni donc à fortiori à $n \in \mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.

La propriété la plus importante des complexes est d'être un corps algébriquement clos (théorème de D'Alembert Gauss) : Tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbf{C}$ admet une racine complexe.

3. Espace vectoriel

Un espace vectoriel sur un corps K est un ensemble E muni de 2 lois, l'une $+$ interne, l'autre externe de $K \times E \to E$. Ces lois doivent vérifier :

$\to$ $(E,+)$ groupe abélien

$\to$ $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in K$ on a

$$\begin{cases} 1.x = x \\ \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y \\ \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x \\ (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x \end{cases}$$

En fait, dans un K espace vectoriel, l'opération de base est la combinaison linéaire : Une combinaison linéaire sur les $(x_i, i \in I)$ de coefficients $(\lambda_i, i \in I)$ **à support fini** ([1]) est l'expression

$$\sum_{i \in I} \lambda_i . x_i$$

On a des propriétés simples : Une combinaison linéaire sur des combinaisons linéaires sur les (x_i) est une combinaisons linéaires des (x_i). Toute combinaison linéaire est une suite de combinaison linéaire élémentaire de la forme $(x,y) \to \lambda x + \mu y$. Tout repose sur cette notion :

(a) Sous espace vectoriel de E : Sous ensemble F non vide stable par combinaison linéaire. La restriction des lois de E à F fait de F un espace vectoriel. Dans la pratique on obtient

$$F \text{ sous espace vectoriel } \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \varnothing \\ \forall \lambda, \mu \in K, \forall x, y \in F, \lambda x + \mu . y \in F \end{cases}$$

i. Opérations :

$\to$ L'intersection de sous espaces vectoriel est un sous espace vectoriel

$\to$ La réunion de sous espaces vectoriels **n'est PAS** un sous espace vectoriel en général. Mais si $A \subset E$ est un ensemble de E, $\langle A \rangle$ ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A est non vide (contient $\vec{0}$ ([2])). Tout sous espace vectoriel contenant A contient $\langle A \rangle$. C'est le sous espace vectoriel engendré par A.

$\to$ Si $(F_i, i \in I)$ est une famille de sous espaces vectoriels de E, on note

$$\sum_{i \in I} F_i = \langle \cup_{i \in I} F_i \rangle = \left\{ \sum_{\substack{i \in J \text{ fini} \\ J \subset I}} x_i \text{ avec } x_i \in F_i \right\}$$

ensemble des vecteurs somme d'un nombre **fini** de vecteurs dans les F_i

$\to$ La somme $\sum_{i \in I} F_i$ est directe et on écrit dans ce cas $\oplus_{i \in I} F_i$ ssi tout vecteur de $\sum_{i \in I} F_i$ s'écrit de façon unique $x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_p}$, les i_k distincts deux à deux, $x_i \in F_i$. Cela revient à écrire que

$$\begin{gathered} \forall p \geqslant 1, \forall \{i_1, \cdots, i_p\} \subset I, \forall x_{i_k} \in F_{i_k} \\ x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_p} = \vec{0} \Rightarrow x_{i_k} = \vec{0}, k = 1 \cdots p \end{gathered}$$

Le cas le plus utile est celui de deux sous espaces : On a d'une part

$$F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \left\{ \vec{0} \right\}$$

[1] support d'une famille $(\mu_i)_{i \in I} = \{i \in I, \mu_i \neq 0\}$. Dans le cas où le support est fini, la somme $\sum_{i \in I} \mu_i$ est en fait une somme finie donc parfaitement définie.

[2] par convention, si $A = \varnothing$, $\sum_{\varnothing} = \vec{0}$

et d'autre part

$$F_1 \oplus \cdots \oplus F_{n-1} \oplus F_n$$
$$\Leftrightarrow$$
$$F_1 \oplus \cdots \oplus F_{n-1} \text{ et } (F_1 + \cdots + F_{n-1}) \oplus F_n$$

ce qui permet de montrer une somme $F_1 \oplus \cdots \oplus F_{n-1} \oplus F_n$ de manière récurrente en utilisant seulement la caractérisation de $F \oplus G$

ii. Dimension finie
Un espace vectoriel est dit de dimension finie si il est engendrée par une famille finie de vecteurs. Il existe dans ce cas une famille génératrice minimale qui est également libre. C'est une base de E, son cardinal, indépendant du choix de la base est la dimension de E.
→ Tout sous espace d'un espace de dimension finie est de dimension finie inférieure
→ Si A sous ensemble de E engendre un espace vectoriel de dimension finie, A est dit de rang fini et et pose $\operatorname{rang} A = \dim \langle A \rangle$

(b) Morphismes
C'est une application d'un K espace vectoriel E vers un K espace vectoriel F. On a

$$f \in L_K(E,F) \Leftrightarrow f \in F^E, \forall \lambda, \mu \in K, \forall x, y \in E$$
$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda . f(x) + \mu . f(y)$$

→ $E = F$: Endomorphisme, f bijective : Isomorphisme, f bijective et $E = F$: Automorphisme
→ E quelconque, $F = K$, f est appelée forme linéaire, on note

$$E^* = L_K(E, K)$$

l'espace dual de E.
→ **Théorème du rang** : On a le résultat suivant

$$\operatorname{rang} f = \dim_K f(E) = \dim_K E - \dim_K \ker f$$

plus utile sous la forme

$$\dim_K f(F) = \dim_K F - \dim_K (\ker f \cap F)$$

(c) Algèbre
Définition : Une K algèbre est un ensemble A muni de 3 lois $+, *$ et $.$ dont une externe de $K \times A \to A$, faisant de A un K espace vectoriel et un anneau, et telles que

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in K, \ \lambda . (x * y) = (\lambda x) * y = x * (\lambda y)$$

Les exemples les plus courants sont les matrices, les suites réelles (voir plus bas), les polynômes, les fonctions continues sur un intervalle de $\mathbf{R}$ etc.
Les algèbres sont aux polynômes (plus rigoureusement aux expressions polynomiales) ce que les espaces vectoriels sont aux combinaisons linéaires.

1.2. Notion de norme.

1. Définition d'une norme
Définition : Soit E un K espace vectoriel (où $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) et $N : E \to [0, +\infty($. N est une norme ssi elle vérifie

$$\begin{cases} \forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0} \\ \forall x \in E, \forall \lambda \in K, N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \\ \forall x, y \in E, N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \end{cases}$$

(E, N) est appelé **espace vectoriel normé** (noté E.V.N)

Remarque :

- $N\left(\vec{0}\right) = 0$ est une conséquence de $N\left(\vec{0}\right) = N\left(0.\vec{0}\right) = 0.N\left(\vec{0}\right) = 0$
- Si N est une norme, $N' = \mu N$ où $\mu > 0$ est également une norme.
- L'inégalité triangulaire permet de déduire les deux inégalités suivantes :

$$\forall x, y \in E, |N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y)$$
$$\forall (x_i) \in E^p, \forall (\lambda_i) \in K^p, N\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^p |\lambda_i| N(x_i)$$

- Les cas $K = \mathbf{R}$ et $K = \mathbf{C}$ sont au démarrage similaires, mais $K = \mathbf{C}$ est moins intuitif ; ainsi prenons deux vecteurs u et v colinéaires de même norme, on a si $K = \mathbf{R}, u = \pm v$ tandis que si $K = \mathbf{C}$, on obtient $u = e^{i\theta}.v$ avec $\theta \in \mathbf{R}$ (soit une infinité de vecteurs).

2. Vocabulaire usuel, distance associée à une norme

Définition : Un vecteur de norme égale à 1 sera dit *normé* ou *unitaire*

Remarque : Si $x \in E, x \neq \vec{0}$, le vecteur $\frac{x}{N(x)}$ est normé.

Définition : Si $A \subset E$, A est bornée ssi il existe $M \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \in A, N(x) \leqslant M$$

on dit que A est bornée par M. Un sous ensemble d'une partie bornée est borné. Il faut distinguer, dans $\mathbf{R}$, *majoré* de *borné.*

Une norme N est associée à une **distance** d en posant pour $x, y \in E, d(x,y) = N(x-y)$.

d vérifie les propriétés d'une distance métrique à savoir :

Proposition :

$$\begin{cases} \forall x, y \in E, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ \forall x, y \in E, d(x,y) = d(y,x) \\ \forall x, y, z \in E, d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) \end{cases}$$

Mais il existe des distances métriques non associées à des normes.

Définition : Si $A \subset E$ non vide et $x \in E$, on pose

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y) = \inf_{y \in A} N(y-x)$$

On peut remarquer que

$$\forall x, y \in E, \forall z \in A, d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

soit

$$d(x,z) \leqslant N(y-x) + d(y,z)$$

on obtient finalement

$$\forall x, y \in E, d(x,A) \leqslant N(y-x) + d(y,A)$$

soit enfin en remarquant que x et y jouent de rôles symétriques

Proposition :

$$\forall x, y \in E, \ |d(x,A) - d(y,A)| \leqslant N(y-x)$$

Cela signifie en fait que la fonction $x \to d(x,A)$ est continue (voir plus loin).

3. Exemples

(a) normes sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$

Exemple 1. *$E = K$, si N est une norme sur E, on a $\forall x \in E, N(x) = N(x.1) = |x|.N(1)$. Les normes sur E sont donc toutes de la forme $N(x) = \lambda.|x|$ où $\lambda > 0$.*

(b) normes sur $\mathbf{R}^n$

Exemple 2. $E = K^n$ *où* $n \geqslant 1$. *Les trois normes usuelles sont définies pour* $x = (x_1, \cdots, x_n)$ *par*

$$N_\infty(x) = \max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$$
$$N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$$
$$N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

(c) normes sur $C_0[a,b]$ ou sur des espaces de fonctions

Exemple 3. $E = \mathcal{C}_0[a,b]$. *On retrouve l'équivalent des trois normes précédentes, pour* $f \in E$,

$$N_\infty(f) = \max(|f(x)|)$$
$$N_1(f) = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$
$$N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\,dx}$$

Exemple 4. *Plus généralement, considérons pour* I *un intervalle de* $\mathbf{R}$ *et* $p \in]1, +\infty($ *(*[3]*)*

$$E = L_p(I) = \left\{ f \text{ intégrable sur } I, \int_I |f|^p < \infty \right\}$$

Posons pour $f \in E$,

$$\|f\| = \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Cela définit une norme sur E.

Preuve . *La démonstration est fondée sur l'inégalité de Holder qui s'énonce comme suit :*
Si q *est telle que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

si $f \in L_p(I), g \in L_q(I)$ *alors*

$$\int_I |fg| \leqslant \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_I |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Supposons cette inégalité acquise. Montrons que $\| \ \|$ *est une norme. Les propositions*

$$\forall f \in L_p(I),\ f = 0 \Leftrightarrow \|f\| = 0$$

et

$$\forall f \in L_p(I), \forall \lambda \in \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C},\ \|\lambda.f\| = |\lambda| . \|f\|$$

sont claires. L'inégalité triangulaire se prouve en écrivant pour $f, g \in L_p(I)$

$$|f+g|^p \leqslant |f| . |h| + |g| . |h| \text{ avec } h = (f+g)^{p-1}$$

Le lemme nous permet d'écrire

$$\int_I |f| . |h| \leqslant \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_I |h|^q\right)^{\frac{1}{q}} \text{ et } \int_I |g| . |h| \leqslant \left(\int_I |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_I |h|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

[3] Cela reste vrai pour le cas $p = 1$ mais la démonstration, bien que plus simple (l'argument principal est l'inégalité triangulaire dans $\mathbf{R}$), est différente.

d'où

$$\|f+g\|^p \leqslant (\|f\|+\|g\|) \cdot \left(\int_I |h|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

or $q(p-1) = qp.\left(1-\frac{1}{p}\right) = p$ *donc* $|h|^q = |f+g|^p$. *Finalement, on obtient*

$$\|f+g\|^p \leqslant (\|f\|+\|g\|) \cdot \|f+g\|^{\frac{p}{q}}$$

et le résultat. □
Il ne reste qu'à établir l'inégalité de Holder.
Lemme : *Si* q *est telle que*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{1}$$

si $f \in L_p(I), g \in L_q(I)$ *alors*

$$\int_I |fg| \leqslant \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_I |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Preuve . *Si* $\int_I |f|^p$ *.ou* $\int_I |g|^q$ *nul, on en déduit* $f=0$ *ou* $g=0$ *(presque partout) et donc* $fg=0$ *soit* $\int_I |fg| = 0$. *Sinon, de la convexité de* e^x *et de (1), on déduit pour tout* (x,y)

$$e^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}} \leqslant \frac{1}{p}.e^x + \frac{1}{q}.e^y$$

et donc avec $x = p.\ln(X)$ *et* $y = q.\ln(Y)$

$$\forall X,Y>0,\ XY \leqslant \frac{X^p}{p}+\frac{Y^q}{q}$$

Cela s'étend à X *et/ou* Y *nuls. Appliquée à*

$$X = \frac{|f|}{\left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \text{ et } Y = \frac{|g|}{\left(\int_I |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

On obtient après intégration sur I

$$\int_I \frac{|fg|}{\left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_I |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \int_I \left(\frac{1}{p}.\frac{|f|^p}{\int_I |f|^p} + \frac{1}{q}.\frac{|g|^q}{\int_I |g|^q}\right)$$

(et donc $\int_I |fg| < \infty$*), soit*

$$\int_I \frac{|fg|}{\left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_I |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \text{ soit } 1$$

□

(d) normes sur les polynômes et les suites

Là encore, on retrouve l'équivalent des normes N_∞, N_1, N_2 en posant pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i.X^i$

$$\begin{aligned} N_\infty(P) &= \max(|a_0|, \cdots, |a_n|) \\ N_1(P) &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} |a_i| \\ N_2(P) &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2} \end{aligned}$$

intuitivement, un polynôme est considéré dans ce cas comme un uplet de longueur variable. Mais un polynôme est également assimilé à une fonction polynôme sur K et ce de façon injective sur K est infini ([4]). Ainsi, sur $\mathbf{R}[X]$, en considérant un polynôme comme une fonction sur $[0,1]$, on obtient comme normes

$$\begin{aligned} N'_\infty(P) &= \max_{x\in[0,1]}(|P(x)|) \\ N'_1(P) &= \int_0^1 |P(x)|\,dx \\ N'_2(P) &= \sqrt{\int_0^1 |P(x)|^2\,dx} \end{aligned}$$

mais on peut aussi poser

$$N'(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(t)|.e^{-t^2}\,dt$$

On peut procéder de même sur les suites : Si B est le $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) espace vectoriel des suites bornées sur un K espace vectoriel E, on peut poser de nouveau pour $(u_n) \in B$

$$N_\infty((u_n)) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \|u_n\|$$

Pour $E = \updownarrow_1$ espace vectoriel des suites (u_n) de série absolument convergente, on peut poser pour $(u_n) \in \updownarrow_1$

$$N_1((u_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

etc.

(e) normes Euclidiennes

Soit $(x,y) \to x \mid y$ un produit scalaire sur E, alors

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbf{R} \\ x & \to & \|x\| = \sqrt{x \mid x} \end{array}$$

définit une norme sur E. On a de plus

$$\forall x, y \in E,\ |x \mid y| \leqslant \|x\|.\|y\| \text{ (Schwarz)}$$

Cela sera vu en détail plus tard. Les normes N_2 ci dessus sont des normes euclidiennes.

1.3. Suites.

1. Suites réelles

(a) Suites, rappels

Les suites à valeurs dans un ensemble X sont les applications de $\mathbf{N}$ vers X i.e un élément de $X^{\mathbf{N}}$. Si $x \in X^{\mathbf{N}}$ et $n \in \mathbf{N}$, on notera x_n au lieu de $x(n)$. La suite elle-même sera désignée par $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ voire (x_n) au lieu de x afin d'éviter des confusions.

[4]Si P et Q sont associés à la même fonction polynôme, le polynôme $P - Q$ est nul sur K donc admet une infinité de racines et est nul d'où $P = Q$.

Lorsque $X = E$ espace vectoriel, $X^{\mathbf{N}}$ est lui même un espace vectoriel de dimension infinie - la famille $(\delta_n^p.u)_{n\in\mathbf{N}}$ pour p parcourant $\mathbf{N}$ et $u \in E$ est libre ([5]). De même, lorsque X est une algèbre, $X^{\mathbf{N}}$, muni de la multiplication terme à terme de suites, est une algèbre. Dans ce chapitre $X = \mathbf{R}$ et donc $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est une algèbre.

(b) Définition de la convergence, lien avec la norme

Définition : Soit $(\varepsilon_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, (ε_n) converge vers 0 ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, |\varepsilon_n| < \varepsilon$$

Une suite (x_n) convergera vers un réel $\mathbf{R}$ ssi la suite $(x_n - l)$ converge vers 0 soit

Définition : (x_n) converge vers $l \in \mathbf{R}$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, |x_n - l| < \varepsilon$$

Remarque : Si une suite positive est majorée par une suite convergeant vers 0, elle converge vers 0. Ainsi, pour montrer que (x_n) converge vers l, dans la pratique, on exhibe souvent une suite (v_n) convergeant vers 0 et telle que $|u_n - l| \leqslant v_n$ ([6]).

Proposition : Une suite convergente est bornée.

Preuve . Soit (x_n) convergeant vers l. $|x_n - l|$ converge vers 0 et

$$\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, |x_n - l| \leqslant 1$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, |x_n| \leqslant \max\left(|x_0|, \cdots, |x_{n_0-1}|, |l| + 1\right)$$

et le résultat. □

(c) Unicité de la limite, arithmétique des limites

On a vu plus haut que on peut se ramener aux suites convergeant vers 0. L'arithmétique des limites s'obtiendra à partir du résultat suivant :

Proposition : La somme de deux suites convergeant vers 0 converge vers 0. Le produit d'une suite convergeant vers 0 par un scalaire converge vers 0.

Preuve . Soit (α_n) et (β_n) convergeant vers 0. Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_1 et n_2 tels que

$$\forall n \geqslant n_1,\ |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \forall n \geqslant n_2,\ |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

On obtient

$$\forall n \geqslant \max(n_1, n_2),\ |\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$$

De même, si $\lambda \in \mathbf{R}$, soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0,\ |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}$$

On a bien

$$\forall n \geqslant n_0,\ |\lambda \alpha_n| < \frac{|\lambda| \varepsilon}{|\lambda| + 1} \leqslant \varepsilon$$

et le résultat. □

On peut maintenant montrer très simplement l'ensemble des résultats classiques des limites :

Proposition : Soit (x_n) une suite convergeant vers l_1 et l_2, alors $l_1 = l_2$

[5] Attention, même si $E = \mathbf{R}$ et $u = 1$, cette famille **n'est pas** une base de $\mathbf{R}^N$, l'écriture $(x_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k.\left(\delta_n^k\right)$, intuitivement correcte même si sa définition est déjà problématique, n'est pas une combinaison linéaire des $\left(\delta_n^k\right), k \in \mathbf{N}$ puisque à support non fini.

[6] Cela est même la définition de la convergence donnée dans le secondaire.

Preuve . On a $|l_1 - l_2| \leqslant |l_1 - x_n| + |x_n - l_2|$ soit une suite convergeant vers 0. On ne peut donc avoir $|l_1 - l_2| > 0$ (définition même de la convergence vers 0) donc $|l_1 - l_2| \leqslant 0$ et $l_1 = l_2$. □

La limite d'une suite convergente est donc unique, on la note $\lim_{n\to+\infty} x_n$

Proposition : Soient (x_n) et (y_n) deux suites convergentes et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, alors $(\lambda.x_n + \mu.y_n)$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda x_n + \mu y_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} x_n + \mu \lim_{n\to+\infty} y_n$$

Preuve . On a

$$\left|(\lambda x_n + \mu y_n) - \left(\lambda \lim_{n\to+\infty} x_n + \mu \lim_{n\to+\infty} y_n\right)\right| \leqslant |\lambda| \left|x_n - \lim_{n\to+\infty} x_n\right| + |\mu| \left|y_n - \lim_{n\to+\infty} y_n\right|$$

convergeant vers 0 d'après ci-dessus. □

Proposition : Le produit de deux suites convergentes converge vers le produit des limites.

Preuve . Soient (x_n) et (y_n) deux suites convergentes vers x et y. On a

$$|x_n.y_n - x.y| \leqslant |x_n| \,.\, |y_n - y| + |x_n - x| \,.\, |y|$$

convergeant vers 0 puisque $|x_n|$ est borné. □

Il ne reste plus qu'à constater la compatibilité entre la convergence et l'ordre des réels :

Proposition : Si (x_n) est une suite positive convergente, alors sa limite est positive.

Preuve . Supposons que $l = \lim_{n\to+\infty} x_n < 0$ et posons $\varepsilon = \frac{-l}{2} > 0$, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, |x_n - l| < -\frac{l}{2}$$

soit

$$\forall n \geqslant n_0,\ x_n < \frac{l}{2} < 0$$

ce qui contredit (x_n) positive. □

(d) Cas des suites monotones, des suites adjacentes

Le problème de la convergence telle qu'elle est définie ci-dessus est que pour établir la convergence d'une suite, la limite éventuelle doit être connue. On ne peut caractériser la propriété d'être convergente sans la connaissance de cette limite. Or, la principale utilisation des suites réside dans la construction d'éléments (les limites) inconnu en dehors de cette construction. Ainsi

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!};\ \gamma = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n;\ \text{etc}$$

La complétude de $\mathbf{R}$ permet de pallier à ce problème.

Définition : On appelle suite monotone une suite (x_n) telle que la suite $(x_{n+1} - x_n)$ soit de signe constant. En l'occurrence

$$\begin{array}{ll}
\forall n \in \mathbf{N}, x_{n+1} - x_n \geqslant 0 \leadsto (x_n) & \text{croissante} \\
\forall n \in \mathbf{N}, x_{n+1} - x_n > 0 \leadsto (x_n) & \text{strictement croissante} \\
\forall n \in \mathbf{N}, x_{n+1} - x_n \leqslant 0 \leadsto (x_n) & \text{décroissante} \\
\forall n \in \mathbf{N}, x_{n+1} - x_n < 0 \leadsto (x_n) & \text{strictement décroissante}
\end{array}$$

Théorème : Soit (x_n) une suite monotone croissante majorée, alors (x_n) converge et converge vers $l = \sup_{n\in\mathbf{N}} x_n$

([7])

[7] Le résultat subsiste si on ne suppose la monotonie qu'à partir d'un certain rang.

Preuve . L'ensemble $X = \{x_n, n \in \mathbf{N}\}$ est non vide majorée donc admet bien une borne supérieure. Soit l cette borne supérieure. Soit $\varepsilon > 0$. $l - \varepsilon < \sup X$ donc il existe un élément de X donc un x_{n_0} tel que

$$l - \varepsilon < x_{n_0}$$

La suite est monotone croissante, donc $\forall n \geqslant n_0, x_n \geqslant x_{n_0} > l-\varepsilon$. Comme $\forall n \geqslant n_0, x_n \leqslant l$, on a bien

$$\forall n \geqslant n_0, |x_n - l| < \varepsilon$$

et (x_n) converge vers l. □

Il en est de même pour les suites monotones décroissantes minorées. Ce résultat admet plusieurs énoncés équivalents. L'un d'entre eux est pratique parce que traduisant l'idée intuitive d'un encadrement de plus en plus précis. Il s'énonce comme suit :

Définition : On appelle couple de suites adjacentes la donnée de deux suites (x_n) et (y_n) monotones de monotonies **opposées** et telles que $(y_n - x_n)$ converge vers 0.

Théorème : Un couple de suites adjacentes (x_n) et (y_n) converge, i.e il existe $l \in \mathbf{R}$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = l$$

Preuve . Mettons (x_n) croissante, alors (y_n) est décroissante et la suite $(y_n - x_n)$ est décroissante convergente vers 0 donc positive d'après ci-dessus. On a donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, x_0 \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant y_0$$

La suite (x_n) est donc croissante majorée donc convergente. Comme $(y_n) = (x_n) + (y_n - x_n)$, (y_n) converge vers $\lim_{n \to +\infty} x_n + 0 = \lim_{n \to +\infty} x_n$. □

(e) Généralisation à $\pm\infty$.

On peut partir de l'idée intuitive qui suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$ ([8]). Une suite (x_n) divergera vers $+\infty$ ssi elle est minorée par une suite monotone croissante non majorée. Soit (m_n) cette suite, si $A \in \mathbf{R}$,il existe $m_{n_0} \geqslant A$, on a pour tout $n \geqslant n_0$

$$x_n \geqslant m_n \geqslant A$$

Réciproquement, si une suite (x_n) vérifie

$$\forall A \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, x_n \geqslant A$$

on constate que $m_n = \inf \{x_p, p \geqslant n\}$ est une suite bien définie croissante non majorée. On peut donc écrire

Définition : Une suite (x_n) diverge vers $+\infty$ ssi

$$\forall A \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, x_n \geqslant A$$

On aurait de même

Définition : Une suite (x_n) diverge vers $-\infty$ ssi

$$\forall A \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, x_n \leqslant A$$

D'après ci-dessus, une suite minorée par une suite divergente vers $+\infty$ diverge vers $+\infty$. De même une suite majorée par une suite divergente vers $-\infty$ diverge vers $-\infty$. Cela donne un outil pratique pour l'étude de ces suites ([9]) ce qui permet d'étendre l'arithmétique des limites à $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Théorème : La somme d'une suite convergente et d'une suite divergeant vers $+\infty$ (ou $-\infty$) est une suite divergeant vers $+\infty$ (ou $-\infty$). Le produit d'une suite divergeant vers $+\infty$ avec une suite convergeant vers $l \neq 0$ est une suite divergeant vers signe$(l)\,\infty$.

[8] L'expression diverger vers $+\infty$ est préférable à converger vers $+\infty$ puisque rigoureusement, dans $\mathbf{R}$, ces suites divergent.

[9] outil qui sert également de définition dans le secondaire

Preuve . Soit (x_n) convergeant vers l. (x_n) est borné par $M \geqslant 0$. Si (y_n) diverge vers $+\infty$, $(x_n + y_n)$ est minoré par la suite $(-M + y_n)$ qui diverge vers $+\infty$. En effet, soit $A \in \mathbf{R}$

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, y_n \geqslant A + M$$

On a bien $\forall n \geqslant n_0, -M + y_n \geqslant A$ et le résultat. De même, si (x_n) converge vers $l > 0$ et (y_n) diverge vers $+\infty$, il existe un rang à partir du quel x_n est minoré par $\frac{l}{2}$. La suite $(x_n y_n)$ est minorée à partir d'un certain rang par $\left(\frac{l}{2} y_n\right)$ qui diverge vers $+\infty$. □

On peut résumer ces propriétés par $+\infty + l = +\infty$ et $+\infty . l = +\infty$ lorsque $l > 0$. De cette façon, on peut étendre les opérations de $\mathbf{R}$ à $\bar{\mathbf{R}}$. On obtient les tableaux suivants

$+$	$+\infty$	$-\infty$	x
$+\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$
$-\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$

$*$	$+\infty$	$-\infty$	0	$x > 0$	$x < 0$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

De même se font des tableaux pour $-$ et $/$.

2. Suites dans un EVN

$(E, \| \, \|)$ est un K espace vectoriel normé de dimension à priori quelconque. L'ensemble $E^{\mathbf{N}}$ est un K espace vectoriel et, si E est une K algèbre, une K algèbre pour le produit terme à terme des suites.

(a) Définition de la convergence, lien avec la norme

La définition de la convergence d'une suite s'inspire directement du chapitre précédent :

Définition : Soit $(u_n) \in E^{\mathbf{N}}$ et $l \in E$, on dit que (u_n) converge vers l ssi la suite $(\|u_n - l\|)$ converge vers 0 soit encore ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, \|u_n - l\| < \varepsilon$$

Dans la pratique, on exhibe une suite (ε_n) positive convergente vers 0 majorant $(\|u_n - l\|)$.

On retrouve les propriétés des suites réelles :

Proposition : Une suite convergente est bornée.

Preuve . Soit (x_n) convergeant vers l. $\|x_n - l\|$ converge vers 0 et

$$\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, \|x_n - l\| \leqslant 1$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \|x_n\| \leqslant \max\left(\|x_0\|, \cdots, \|x_{n_0-1}\|, \|l\| + 1\right)$$

et le résultat. □

Il est important de noter que cette notion de convergence est fortement dépendante de la norme ().

Exemple 5. *prenons $E = C_0[0,1]$ et (f_n) définie par*

$$f_n(x) = x^n$$

Pour les normes définies dans l'exemple 3, on obtient

$$N_\infty(f_n) = 1 \text{ et } N_1(f_n) = \frac{1}{n+1}$$

la suite (f_n) converge donc vers 0 pour la norme N_1 (convergence dite en moyenne) mais pas pour la norme N_∞ (convergence dite uniforme). Si l'on prend $E = C_0\left[0, +\infty\right($ et

$$f_n(x) = \frac{1}{n}.e^{-\frac{x}{n}}$$

on a cette fois

$$N_\infty(f_n) = \frac{1}{n} \text{ et } (f_n) \overset{N_\infty}{\to} 0$$

mais

$$N_1(f_n) = 1$$

et (f_n) ne converge pas vers 0 pour la norme N_1.

(b) Unicité de la limite, arithmétique des limites

Là encore, l'arithmétique des limites s'obtiendra à partir du même résultat préliminaire dans les suites réelles sur les suites convergeant vers 0. On retrouve tout d'abord l'unicité de la limite

Proposition : Soit (x_n) une suite convergeant vers l_1 et l_2, alors $l_1 = l_2$

Preuve . On a $\|l_1 - l_2\| \leqslant \|l_1 - x_n\| + \|x_n - l_2\|$ soit une suite convergeant vers 0. On en déduit $l_1 = l_2$. □

La limite d'une suite convergente est unique, on la note $\lim_{n\to+\infty} x_n$

Proposition : Soient (x_n) et (y_n) deux suites convergentes et $\lambda, \mu \in K$, alors $(\lambda.x_n + \mu.y_n)$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda x_n + \mu y_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} x_n + \mu \lim_{n\to+\infty} y_n$$

Preuve . On a

$$\left\|(\lambda x_n + \mu y_n) - \left(\lambda \lim_{n\to+\infty} x_n + \mu \lim_{n\to+\infty} y_n\right)\right\| \leqslant |\lambda| \left\|x_n - \lim_{n\to+\infty} x_n\right\| + |\mu| \left\|y_n - \lim_{n\to+\infty} y_n\right\|$$

convergeant vers 0 d'après ci-dessus. □

(c) Le problème du produit

Dans le cas où E est une algèbre, on pourrait s'attendre à une propriété équivalente. Cependant un problème apparaît.

Exemple 6. *Prenons $E = \mathbf{R}[X]$ et posons pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i.X^i$*

$$\|P\| = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} |a_{2i}| + \frac{|a_{2i+1}|}{2i+1}$$

On définit ainsi une norme (exercice). Pour cette norme, la suite $P_n = X^{2n+1}$ vérifie

$$\|P_n\| \leqslant \frac{1}{2n+1}$$

la suite (P_n) converge donc vers 0. Cependant, on a

$$P_n.P_n = X^{2n} \text{ de norme } 1$$

et la suite $(P_n.P_n)$ produit de deux suites convergeant vers 0 ne converge pas vers 0.

On verra plus tard que ce problème résulte de la non continuité du produit. Une condition suffisante ([10]) pour que le produit de deux suites convergentes soit une suite convergeant vers le produit des limites est que la norme d'un produit soit majoré (à une constante près) par le produit des normes. On obtient la définition suivante :

Définition : On appelle algèbre normée une algèbre A munie d'une norme $\| \ \|$ vérifiant

$$\exists \Lambda > 0, \forall x, y \in A, \|x.y\| \leqslant K. \|x\| . \|y\|$$

Exemple 7. $\mathbf{R}, \mathbf{C}$ *les matrices carrées* $n \times n$ *soit* $M(n, K)$ *munie de la norme*

$$\|A\| = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|$$

sont des algèbres normées ([11]). On verra que tout algèbre de dimension finie est normée.

Si A est une algèbre normée, on a alors le résultat attendu :

Proposition : Soit A une algèbre normée, alors le produit de deux suites convergentes converge vers le produit des limites.

Preuve . On peut donc écrire

$$\exists \Lambda > 0, \forall x, y \in A, \|x.y\| \leqslant K. \|x\| . \|y\|$$

Soient (x_n) et (y_n) deux suites convergentes vers x et y. On a

$$\|x_n.y_n - x.y\| \leqslant \Lambda. \|x_n\| . \|y_n - y\| + \Lambda. \|x_n - x\| . \|y\|$$

convergeant vers 0 puisque $\|x_n\|$ est borné. □

(d) Changement de normes, normes équivalentes

La convergence d'une suite vers une limite $l \in E$ dépend de la norme choisie. Il est donc intéressant d'étudier les normes induisant la même notion de convergence.

Définition : On dira que deux normes N, N' seront équivalentes ssi $\forall (x_n) \in E^{\mathbf{N}}, \forall l \in E$

$$(x_n) \xrightarrow{N} l \Leftrightarrow (x_n) \xrightarrow{N'} l$$

Cette définition, intuitivement claire, se manipule difficilement. On préfère en général la caractérisation suivante souvent prise comme définition de l'équivalence de normes :

Proposition : Deux normes N, N' seront équivalentes ssi $\exists \alpha, \beta > 0$ tels que

$$\forall x \in E, \ N'(x) \leqslant \alpha.N(x) \text{ et } N(x) \leqslant \beta.N'(x)$$

soit encore ssi $\exists \lambda, \mu > 0$ tels que

$$\forall x \in E, \ \lambda.N'(x) \leqslant N(x) \leqslant \mu.N'(x)$$

Preuve . On peut noter en posant $(x'_n) = (x_n - l)$ que deux normes N, N' seront équivalentes ssi $\forall (x_n) \in E^{\mathbf{N}}$,

$$(N(x_n)) \to 0 \Leftrightarrow (N'(x_n)) \to 0$$

[10] et même nécessaire (exercice)

[11] On a en effet dans ce dernier cas

$$\|A.B\| \leqslant n. \|A\| . \|B\|$$

avec n fixe.

- Montrons le sens $\Rightarrow$.
Supposons que
$$\text{non}\left(\exists\alpha,\beta>0,\forall x\in E,\ N'(x)\leqslant\alpha.N(x)\ \text{ et }N(x)\leqslant\beta.N'(x)\right)$$
soit
$$\text{non}\left(\exists\alpha>0,\forall x\in E,\ N'(x)\leqslant\alpha.N(x)\ \text{ et }\exists\beta>0,\forall x\in E,N(x)\leqslant\beta.N'(x)\right)$$
soit
$$\forall\alpha>0,\exists x\in E,N'(x)>\alpha.N(x)\ \text{ ou }\forall\beta>0,\exists x\in E,N(x)>\beta.N'(x)$$
Mettons $\forall\alpha>0,\exists x\in E,N'(x)>\alpha.N(x)$. On a entre autres avec $\alpha=n+1$
$$\forall n\geqslant 0,\exists x_n\in E,N'(x_n)>(n+1).N(x_n)$$
On peut en déduire que $N'(x_n)\neq 0$ et donc $x_n\neq 0$. Posons
$$y_n=\frac{x_n}{N'(x_n)}$$
On a $N'(y_n)=1$ et (y_n) ne peut converger vers $\vec{0}$ pour la norme N'. Or on a
$$N(y_n)<\frac{1}{n+1}.N'(y_n)\ \text{ soit }\frac{1}{n+1}$$
et donc
$$(y_n)\overset{N}{\to}\vec{0}$$
Les deux normes N et N' ne sont pas équivalentes. Le sens $\Rightarrow$ est donc prouvé.
- Supposons que
$$\exists\alpha,\beta>0,\forall x\in E,\ N'(x)\leqslant\alpha.N(x)\ \text{ et }N(x)\leqslant\beta.N'(x)$$
On a $\forall(x_n)\in E^{\mathbf{N}}$
$$N'(x_n)\leqslant\alpha.N(x_n)\ \text{ et }N(x_n)\leqslant\beta.N'(x_n)$$
et donc
$$(N(x_n))\to 0\Leftrightarrow(N'(x_n))\to 0$$
Les deux normes sont équivalentes. □

Dans la pratique, on exhibe un α et un β pour montrer que deux normes sont effectivement équivalentes et, dans le cas contraires, on construit une suite (x_n) convergeant vers $\vec{0}$ pour une norme et pas pour l'autre.

(e) Cas de $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$.

La propriété essentielle d'un K espace vectoriel de dimension finie (isomorphe à un $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$ donc) est que toutes les normes sur un tel espace sont équivalentes. La notion de convergence d'une suite est donc indépendante du choix de la norme et équivaut en fait à la convergence coordonnée à coordonnée dans une base choisie quelconque. Ce résultat, important et difficile à obtenir, ne peut être prouvé pour le moment. Le principe consiste tout d'abord à construire une norme de référence.

Définition : Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et $B_E=(e_1,\cdots,e_p)$ une base de E. On définit sur E trois normes par si $x=\sum_{i=1}^{p}x_i.e_i$
$$\begin{array}{l}N_{B_E,\infty}(x)=\max\left(|x_1|,\cdots,|x_p|\right)\\ N_{B_E,1}(x)=\sum_{i=1}^{p}|x_i|\\ N_{B_E,2}(x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{p}|x_i|^2}\end{array}$$
que l'on écrira si il n'y pas d'ambiguïtés sur B_E, N_∞,N_1 et N_2. Ces trois normes sont équivalentes.

Preuve . Le fait que cela définit trois normes a déjà été vu (exemple 2). Ces trois normes sont équivalentes, en effet, on a pour tout $x \in E$

$$N_\infty(x) \leqslant N_1(x) \leqslant p.N_\infty(x)$$

et

$$N_\infty(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \sqrt{p}.N_\infty(x)$$

et le résultat. □

La convergence d'une suite pour l'une de ces trois normes équivaut à la convergence coordonnée à coordonnée. Cela s'énonce par la proposition suivante :

Proposition : Soit $(x_n) \in E^{\mathbf{N}}$ donnée dans la base B_E par

$$x_n = \sum_{i=1}^{p} x_{i,n}.e_i$$

Soit $l = \sum_{i=1}^{p} l_i.e_i$, alors

$$(x_n) \overset{N_\infty \text{ ou } N_1 \text{ ou } N_2}{\to} l \Leftrightarrow \forall i = 1\cdots p, (x_{i,n}) \text{ CV vers } l_i$$

Preuve . Il suffit de le prouver pour la norme N_∞.
On a $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall i = 1\cdots p, |x_{i,n} - l_i| \leqslant N_\infty(x_n - l)$ d'où

$$(x_n) \overset{N_\infty}{\to} l \Rightarrow \forall i = 1\cdots p, (x_{i,n}) \text{ CV vers } l_i$$

De même,

$$N_\infty(x_n - l) \leqslant \sum_{i=1}^{p} |x_{i,n} - l_i|$$

d'où

$$(x_n) \overset{N_\infty}{\to} l \Leftarrow \forall i = 1\cdots p, (x_{i,n}) \text{ CV vers } l_i$$

et finalement l'équivalence cherchée. □

Le principe consiste à montrer maintenant que si N est une norme sur E, N est équivalente à $N_{B_E,\infty}$. On obtiendra alors

Théorème : Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Preuve . Soit N une norme sur E. On va montrer que N est "majorée" par $N_{B_E,\infty}$ (qu'on notera N_∞). La "minoration" sera établie plus tard. Soit $x \in E$, x s'écrit $\sum_{i=1}^{p} x_i.e_i$, on a donc

$$N(x) \leqslant \sum_{i=1}^{p} |x_i|.N(e_i) \leqslant K.N_\infty(x) \text{ avec } K = \sum_{i=1}^{p} N(e_i)$$

Entre autres, si $(x_n) \overset{N_\infty}{\to} l$ alors $(x_n) \overset{N}{\to} l$. Il nous faudrait maintenant prouver l'existence de K' tel que

$$N_\infty(x) \leqslant K'.N(x)$$

C'est cela qui sera prouvé plus tard. □

3. Comparaison de suites

(a) Cas des suites réelles ou complexes

Le but est de classer des suites qui dans la pratique seront des infiniment petits ou des infiniment grands.

Dans la pratique, si $(u_n), (v_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, on étudie le rapport $\frac{u_n}{v_n}$:

$$\text{Si } \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \begin{cases} \text{est borné, alors } (u_n) = O(v_n) \\ \to 0 \text{ quand } n \to +\infty \text{ alors } (u_n) = o(v_n) \\ \to 1 \text{ quand } n \to +\infty \text{ alors } (u_n) \sim (v_n) \end{cases}$$

Cependant cela ne peut être une définition générale puisque non valable si v_n s'annule. L'idée consiste simplement à imposer l'existence d'un rapport $\frac{u_n}{v_n}$ même si v_n s'annule en écrivant $u_n = \lambda_n . v_n$ à partir d'un certain rang. On obtient

Définition : Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes. On dira que $\begin{cases} (u_n) = O(v_n) \\ (u_n) = o(v_n) \\ (u_n) \sim (v_n) \end{cases}$ ssi il existe un rang n_0 et une suite (λ_n) tels que

$$\forall n \geqslant n_0, u_n = \lambda_n . v_n \text{ et } (\lambda_n) \begin{cases} \text{est borné} \\ \to 0 \text{ quand } n \to +\infty \\ \to 1 \text{ quand } n \to +\infty \end{cases}$$

$(u_n) = O(v_n)$ se lit (u_n) de l'ordre de (v_n)

$(u_n) = o(v_n)$ se lit (u_n) négligeable devant (v_n)

$(u_n) \sim (v_n)$ se lit (u_n) équivalent à (v_n)

Remarque : Si (u_n) se compare à (v_n) alors $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, v_n = 0 \Rightarrow u_n = 0$. On a l'équivalence $v_n = 0 \Leftrightarrow u_n = 0$ à partir de ce rang n_0 si $(u_n) \sim (v_n)$. On note qu'une conséquence directe de cela est

Proposition : $\begin{cases} (u_n) = O(0) \\ (u_n) = o(0) \\ (u_n) \sim (0) \end{cases}$ ssi il existe $n_0 \in \mathbf{N}$, tel que $\forall n \geqslant n_0, u_n = 0$.

([12]) On notera parfois $(u_n) \ll (v_n)$ au lieu de $(u_n) = o(v_n)$.

Remarque : Il n'est pas nécessaire de faire apparaître la suite (λ_n). On peut soit utiliser le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ si cela est possible, soit procéder comme suit :

- $(u_n) = O(v_n)$ ssi il existe une constant $K \geqslant 0$ et un rang n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, |u_n| \leqslant K. |v_n| \text{ (i.e } (\lambda_n) \text{ bornée)}$$

- $(u_n) = o(v_n)$ ssi $\forall \varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, |u_n| \leqslant \varepsilon. |v_n| \text{ (i.e } (\lambda_n) \text{ tend vers 0)}$$

- $(u_n) \sim (v_n)$ ssi $(u_n - v_n) = o(v_n)$ et on procède comme ci-dessus.

On obtient immédiatement

Proposition : La relation $\sim$ est une relation d'équivalence. De façon générale, on peut écrire le tableau suivant

et	$u_n \sim v_n$	$u_n = o(v_n)$	$u_n = O(v_n)$
$v_n \sim w_n$	$u_n \sim w_n$	$u_n = o(w_n)$	$u_n = O(w_n)$
$v_n = o(w_n)$	$u_n = o(w_n)$	$u_n = o(w_n)$	$u_n = o(w_n)$
$v_n = O(w_n)$	$u_n = O(w_n)$	$u_n = o(w_n)$	$u_n = O(w_n)$

[12] C'est pour cela qu'on ne compare **jamais** une suite à la suite nulle.

et, par ailleurs

Proposition : Si $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et si $l \in \mathbf{R}$, $l \neq 0$ (important), alors

$$(u_n) \sim \lim_{n \to +\infty} (u_n) = l$$

puis

Proposition : Soit (v_n) une suite, une combinaison linéaire de suites négligeables devant (v_n) (resp de même ordre que (v_n)) est négligeable devant (v_n) (resp de même ordre que (v_n)). Si $(u_n) \sim (v_n)$ et (w_n) une suite donnée, alors $(u_n.w_n) \sim (v_n.w_n)$.

Preuve . Les démonstrations ([13]) simples, sont immédiates si on étudie le rapport des suites concernées (cas où le dénominateur est non nul) et, dans le cas général, utilisent l'arithmétique des limites : Le produit de deux suites convergeant vers 1 converge vers 1, d'une suite bornée avec une suite convergeant vers 0 converge vers 0, etc. □

On peut également noter l'équivalence entre $\left\{ \begin{array}{l} (u_n) \sim (v_n) \\ (u_n - v_n) = o(v_n) \\ (u_n - v_n) = o(u_n) \end{array} \right.$

(b) Notations de Landau

Ces notations consistent à écrire $u_n = v_n + o(v_n)$ lorsque $(u_n - v_n) = o(v_n)$ et $u_n = w_n + O(v_n)$ lorsque $(u_n - w_n) = O(v_n)$, en clair, on remplace une suite (ici, $u_n - v_n$) que l'on sait négligeable par $o(v_n)$ dans une expression contenant u_n. Il peut y avoir plusieurs o.

Exemple 8. *Soit (u_n) vérifiant $\cos u_n = e^{-\frac{1}{n}}$ avec $(u_n) \in [0,1]$. On a $u_n = \arccos e^{-\frac{1}{n}} \to 0$ donc u_n est un infiniment petit. On peut écrire*

$$\cos u_n = 1 - \frac{u_n^2}{2} + o\left(u_n^2\right) \text{ et } e^{-\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$o\left(u_n^2\right)$ représente une suite négligeable devant $\left(u_n^2\right)$ et $o\left(\frac{1}{n}\right)$ une suite négligeable devant $\frac{1}{n}$. On déduit en remarquant que $-2o\left(u_n^2\right) = o\left(u_n^2\right)$ (ce qui se lit comme si ε_n est négligeable devant u_n^2, $-2\varepsilon_n$ aussi) que

$$u_n^2 + o\left(u_n^2\right) = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comme $o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{2}{n}\right)$ (l'usage consiste à laisser $\frac{1}{n}$), cette égalité nous dit qu'une suite équivalente à u_n^2 (à savoir $u_n^2 + o\left(u_n^2\right)$) est égale à une suite équivalente à $\frac{2}{n}$. On a donc $n.u_n^2 \sim 2$ et $(u_n) \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Les o et les O se manipulent comme des suites, **ils ne se devinent pas**, ils se calculent avec les règles arithmétiques usuelles ainsi que celles énoncés ci-dessus. L'intérêt est que les calculs sont souvent grandement simplifiés ; on ne conserve que la partie significative lors des développements. L'application principale est la notion de développement limité.

Définition : On appelle échelle de comparaison la donnée d'une famille de suites non stationnaires en 0 ([14]) indexée sur un ensemble totalement ordonné I (en général $\mathbf{N}$ mais cela peut être $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{R}$) vérifiant si

$$\mathcal{F} = \left\{ (v_{i,n})_{n \in \mathbf{N}} \right\},\ (v_{i,n}) \ll (v_{j,n}) \Leftrightarrow i > j$$

[13]laissées au soin du lecteur finalement !

[14]dans la pratique, jamais nulles pour $n \geqslant n_0$ avec n_0 donné

Exemple 9. *Usuellement, on prend*

- $\mathcal{F}_1 = \left\{\frac{1}{n^p}, p \in \mathbf{N}\right\}$ *source des développements limités*
- $\mathcal{F}_2 = \left\{\left(n^\alpha . \ln^\beta n\right) ;\ (\alpha, b) \in \mathbf{R}^2\right\}$, $\mathbf{R}^2$ *est ordonné par l'ordre lexicographique, cela donne les développements asymptotiques*
- $\frac{1}{2^n}$ *est négligeable devant toutes les suites de* $\mathcal{F}_1$, *on peut prendre une échelle géométrique de la forme*
$$\mathcal{F}_3 = \left\{\frac{1}{2^{pn}}, p \in \mathbf{N}\right\}$$
voire
$$\mathcal{F}_4 = \{a^n,\ a \in]0, +\infty(\}$$
ou même
$$\mathcal{F}_5 = \{n^\alpha . a^n,\ \alpha \in \mathbf{R}, a \in]0, +\infty(\}$$

Dans la pratique, on adapte l'échelle au problème traité. On peut définir la notion de développement suivant une échelle

Définition : On appelle développement à p termes d'une suite (u_n) suivant une échelle $\mathcal{F} = \left\{(v_{i,n})_{n \in \mathbf{N}}\right\}$ l'écriture

$$u_n = \sum_{k=1}^{p} a_k . v_{i_k,n} + \left\{ \begin{array}{l} o\left(v_{i_p,n}\right) \text{ développement faible} \\ O\left(v_{i_{p+1},n}\right) \text{ développement fort} \end{array} \right.$$

avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ (resp $< i_{p+1}$), les a_k étant des réels (ou complexes) non nuls. $\sum_{k=1}^{p} a_k . v_{i_k,n}$ est appelé partie principale du développement.

Remarque : Dans la pratique, il n'est pas facile de prévoir le nombre p de termes d'un développement, dans ce cas, on fixe à priori la "précision" ([15]) en se donnant le terme
$\left\{ \begin{array}{l} o\left(v_{i_p,n}\right) \text{ pour un développement faible} \\ O\left(v_{i_{p+1},n}\right) \text{ pour un développement fort} \end{array} \right.$

Proposition : Le développement à p termes d'une suite (u_n) sur une échelle $\mathcal{F}$ est unique (au terme $O\left(v_{i_{p+1},n}\right)$ près dans le cas d'un développement fort).

Preuve . Montrons un lemme préliminaire

Lemme : Si (u_n) vérifie $u_n = o(u_n)$ alors u_n stationnaire en 0.

En effet, à partir d'un certain rang n_1, $u_n = \varepsilon_n . u_n$ avec ε_n convergeant vers 0. Donc il existe un $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant n_0, |\varepsilon_n| \leqslant \frac{1}{2}$$
On peut écrire
$$\forall n \geqslant n_0, n_1, |u_n| \leqslant \frac{|u_n|}{2} \text{ et donc } u_n = 0$$
Considérons maintenant
$$\mathcal{P}(p) \equiv \left(\begin{array}{l} \text{Si } \sum_{k=1}^{p} a_k . v_{i_k,n} + o\left(v_{i_p,n}\right) = \sum_{k=1}^{p} a'_k . v_{i'_k,n} + o\left(v_{i'_p,n}\right) \\ \text{alors } a_k = a'_k \text{ et } i_k = i'_k \text{ pour } k = 1 \cdots p \end{array} \right.$$

Montrons $\mathcal{P}(1)$, si $a_1 . v_{i_1,n} + o\left(v_{i_1,n}\right) = a'_1 . v_{i'_1,n} + o\left(v_{i'_1,n}\right)$ alors $a_1 . v_{i_1,n} \sim a'_1 . v_{i'_1,n}$. Si $i_1 \neq i'_1$, on aurait mettons $i_1 < i'_1$ et donc $v_{i_1,n} = o\left(v_{i'_1,n}\right)$ soit $a'_1 . v_{i'_1,n} \sim a_1 . v_{i_1,n} = o\left(v_{i'_1,n}\right)$ et $\left(v_{i'_1,n}\right)$ stationnaire en 0 à partir d'un certain rang ce qui est faux. Donc $i_1 = i'_1$ puis $a_{i_1} = a'_1$.

[15] précision est impropre car en général, même poussé assez loin, un développement asymptotique n'est pas forcément une bonne approximation numérique de la suite.

Supposons $\mathcal{P}(p)$ acquis, et supposons $\sum_{k=1}^{p+1} a_k.v_{i_k,n}+o\left(v_{i_p,n}\right)=\sum_{k=1}^{p+1} a'_k.v_{i'_k,n}+o\left(v_{i'_p,n}\right)$, comme

$$\sum_{k=2}^{p+1} a_k.v_{i_k,n}+o\left(v_{i_p,n}\right)=\sum_{k=2}^{p+1} o\left(v_{i_1,n}\right)+o\left(v_{i_1,n}\right)=o\left(v_{i_1,n}\right)$$

et

$$\sum_{k=2}^{p+1} a_k.v_{i'_k,n}+o\left(v_{i'_p,n}\right)=\sum_{k=2}^{p+1} o\left(v_{i'_1,n}\right)+o\left(v_{i'_1,n}\right)=o\left(v_{i'_1,n}\right)$$

On en déduit $a_1.v_{i_1,n}+o\left(v_{i_1,n}\right)=a'_1.v_{i'_1,n}+o\left(v_{i'_1,n}\right)$ puis $i_1=i'_1$ et $a_{i_1}=a'_1$ $(\mathcal{P}(1))$. De là, on tire

$$\sum_{k=2}^{p+1} a_k.v_{i_k,n}+o\left(v_{i_p,n}\right)=\sum_{k=2}^{p+1} a_k.v_{i'_k,n}+o\left(v_{i'_p,n}\right)$$

et, en appliquant $\mathcal{P}(p)$, $a_k=a'_k$ et $i_k=i'_k$ pour $k=1\cdots p$ pour $k=2\cdots p+1$ puis $\mathcal{P}(p+1)$.

En remarquant qu'un développement fort est un développement faible, on en déduit la proposition. $\square$

Ce résultat est à la base des développements asymptotiques et limités. Ceux ci, particulièrement important dans la pratique car fournissant un outil puissant — on a souvent des développements très précis de suites dont on ne connaît pas d'expressions explicites — nécessitent une grande pratique ([16]) avant d'être maîtrisés.

(c) Cas des suites à valeurs dans E. o et O d'une suite réelle

On ne peut bien sûr pas faire de quotient de deux suites à valeurs vectorielles ni même le simuler, il serait inintéressant de comparer des suites uniques colinéaires. Le principe consiste en fait à comparer une suite vectorielle (u_n) à une suite réelle (en général positive) (v_n) par l'intermédiaire de sa norme.

Définition : Soit $(u_n)\in E^{\mathbf{N}}$ et $(v_n)\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, on écriera $\left\{\begin{array}{l}(u_n)=O(v_n)\\(u_n)=o(v_n)\end{array}\right.$ dès que $\left\{\begin{array}{l}(\|u_n\|)=O(v_n)\\(\|u_n\|)=o(v_n)\end{array}\right.$, par abus, si $(u_n),(v_n)\in E^{\mathbf{N}}$, on pourra écrire $u_n=o(v_n)$ en lieu et place et $u_n=o(\|v_n\|)$

Cela permet d'utiliser les notations de Landau pour des suites à valeurs vectorielles. Mais l'absence de multiplication et de division dans E en limite la portée.

1.4. Manipulation des suites, critères de convergence.

1. Suites extraites

(a) Définition des suites extraites

Définition : Soit $(x_n)\in E^{\mathbf{N}}$, on appelle suite extraite (ou sous suite) de (x_n) une suite (y_n) telle que il existe α **strictement** croissante de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{N}$ telle que

$$\forall n\in\mathbf{N}, y_n=x_{\alpha(n)}$$

On écrira simplement "$\left(x_{\alpha(n)}\right)$ une suite extraite de (x_n)". Il faut se méfier dans l'écriture des suites extraites ; si (x_n) est une suite de E, si $(y_n)=(x_{2n})$ extraite de (x_n) $(\alpha(n)=2n)$ et si $(z_n)=(y_{2n+1})$, on a bien sûr (z_n) extraite de (x_n) mais $(z_n)=\left(x_{2(2n+1)}\right)=(x_{4n+2})$ **et non** $(z_n)=(x_{4n+1})$. Autrement dit, si $(y_n)=\left(x_{\alpha(n)}\right)$ et $(z_n)=\left(y_{\beta(n)}\right)$, on a $(z_n)=\left(x_{\alpha(\beta(n))}\right)$ et non $\left(x_{\beta(\alpha n)}\right)$ (erreur fréquente).

De manière immédiate, une suite extraite d'une suite bornée est bornée. Plus important est la propriété suivante

Proposition : Soit (x_n) une suite convergente vers $l\in E$, alors toute suite extraite de (x_n) converge vers l.

[16]comprendre il faut faire beaucoup d'exercices

Preuve . On peut écrire pour $\varepsilon > 0$

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, |x_n - l| < \varepsilon$$

Or de $\alpha(n+1) - \alpha(n) \geqslant 1$ (car entier strictement positif), on déduit $\forall n \in \mathbf{N}, \alpha(n) \geqslant n$ et donc

$$\forall n \geqslant n_0, \left|x_{\alpha(n)} - l\right| < \varepsilon$$

La suite $\left(x_{\alpha(n)}\right)$ converge bien vers l. □

Cela est très utile pour nier la convergence d'une suite vers $l \in E$; il suffit d'exhiber une suite extraite divergente ou (plus simple souvent) convergeant vers $l' \neq l$.

Définition : On appelle valeur d'adhérence d'une suite (x_n) un vecteur $l \in E$ tel qu'il existe $\left(x_{\alpha(n)}\right)$ extraite de (x_n) convergeant vers l.

(b) Construction de suite extraite

Les suites constituent un outil particulièrement puissant, beaucoup de démonstrations se font en construisant des suites ayant des propriétés voulues. Les extractions successives à partir d'une suite initiale sont le moyen principal pour cela.

- Non convergence d'une suite vers $l \in E$

  Une méthode simple consiste à remarquer qu'un sous ensemble infini de $\mathbf{N}$ se met sous la forme $\{\alpha(n)\, n \in \mathbf{N}\}$ ([17]). Or dans $\mathbf{N}$ les ensembles infinis sont ceux non majorés.

  Ainsi si (x_n) est une suite de E et $l \in E$, (x_n) non convergente vers $l \in E$ ssi

  $$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall n_0 \in \mathbf{N}, \exists n \geqslant n_0, \|x_n - l\| \geqslant \varepsilon_0$$

  soit ssi $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que l'ensemble $\{n \in \mathbf{N}, \|x_n - l\| \geqslant \varepsilon_0\}$ est infini soit enfin ssi $\exists \varepsilon_0 > 0$ et une suite extraite $\left(x_{\alpha(n)}\right)$ de (x_n) tel que $\forall n \in \mathbf{N}, \left\|x_{\alpha(n)} - l\right\| \geqslant \varepsilon_0$. Cette méthode simple est la plus courante.

- Suite non bornée

  Parfois le procédé de construction est plus compliqué et se fait par récurrence. C'est le cas lorsque l'on veut construire une suite extraite vérifiant une propriété du type $\forall n \in \mathbf{N}, \mathcal{P}\left(x_{\alpha(n)}, \alpha(n), n\right)$. Ainsi, soit une suite (x_n) de E non bornée, on va montrer l'existence de $\left(x_{\alpha(n)}\right)$ extraite de (x_n) vérifiant

  $$\left(\left\|x_{\alpha(n)}\right\|\right) \text{ croissante minorée par } (n)$$

  Pour cela on va utiliser le fait que la suite étant non bornée, $\forall A \geqslant 0$, l'ensemble $\{p \in \mathbf{N}, \|x_p\| \geqslant A\}$ est infini et on va faire croître A.

  On pose $\alpha(0) = 0$. Supposons pour n donné avoir construit $\alpha(k)$ pour $k = 0 \cdots n$ vérifiant

  $$\alpha(0) < \alpha(1) < \cdots < \alpha(n)$$

  et

  $$\forall k \in \{0, \cdots, n\}, \left\|x_{\alpha(k)}\right\| \geqslant k \text{ et si } k \geqslant 1, \left\|x_{\alpha(k)}\right\| \geqslant \left\|x_{\alpha(k-1)}\right\|$$

  L'ensemble

  $$A = \left\{p \in \mathbf{N}, \|x_p\| \geqslant \max\left(n+1, \left\|x_{\alpha(n)}\right\|\right)\right\}$$

  est infini donc non majoré par $\alpha(n)$. Il contient donc un entier supérieur à $\alpha(n) + 1$. Soit $\alpha(n+1)$ cet entier, on a bien $\left\|x_{\alpha(n+1)}\right\| \geqslant n+1$ et $\left\|x_{\alpha(n+1)}\right\| \geqslant \left\|x_{\alpha(n)}\right\|$ soit finalement

  $$\alpha(0) < \alpha(1) < \cdots < \alpha(n+1)$$

[17] En effet, si A est cet ensemble, on pose $\alpha(0) = \min A$ et

$$\alpha(n+1) = \min A \cap [\alpha(n) + 1, +\infty($$

non vide puisque A infini.

et

$$\forall k \in \{0, \cdots, n+1\}, \|x_{\alpha(k)}\| \geqslant k \text{ et si } k \geqslant 1, \|x_{\alpha(k)}\| \geqslant \|x_{\alpha(k-1)}\|$$

Par récurrence, on a donc construit une suite extraite $(x_{\alpha(n)})$ vérifiant

$$(\|x_{\alpha(n)}\|) \text{ croissante minorée par } (n)$$

- Ce procédé permet d'obtenir des résultats non immédiats au démarrage. Montrons par exemple que dans $\mathbf{R}$, de toute suite on peut extraire une suite monotone. Considérons pour cela

$$A = \{n \in \mathbf{N}, \forall p \geqslant n, x_p \geqslant x_n\}$$

Soit A est infini, soit A est fini.
$\rightarrow$ Si A est infini, il existe α strictement croissante tel que $A = \{\alpha(n), n \in \mathbf{N}\}$. La suite $(x_{\alpha(n)})$ est croissante par définition même de A.
$\rightarrow$ Sinon, il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, n \notin A$ (soit A majoré). On a dans ce cas

$$\forall n \geqslant n_0, \exists p \geqslant n, x_p < x_n \text{ (et donc } p \neq n)$$

Posons $\alpha(0) = n_0$ et supposons avoir construit $\alpha(k)$ pour $k = 0 \cdots n$ vérifiant

$$\alpha(0) < \alpha(1) < \cdots < \alpha(n)$$

et $(x_{\alpha(k)})_{k=0\cdots n}$ strictement décroissante. On a $\alpha(n) \geqslant \alpha(0) \geqslant n_0$ donc

$$\exists p \geqslant \alpha(n), x_p < x_{\alpha(n)}$$

Soit $\alpha(n+1)$ un tel p (il peut y en avoir plusieurs), on a

$$\alpha(0) < \alpha(1) < \cdots < \alpha(n+1)$$

et $(x_{\alpha(k)})_{k=0\cdots n+1}$ strictement décroissante. La suite $(x_{\alpha(n)})$ ainsi construite est strictement décroissante.
On a bien pu extraire de (x_n) soit une suite croissante soit une suite décroissante donc une suite monotone.

(c) Théorème de Bolzano Weirstrass dans $\mathbf{R}$

Ce dernier point a une conséquence particulièrement importante dans $\mathbf{R}$. En effet, si $\mathbf{R}$ est une suite bornée de réels, alors, admettant d'après ci-dessus une suite extraite monotone donc convergente puisque bornée, cette suite admet une valeur d'adhérence. C'est le théorème de Bolzano Weirstrass :

Théorème : De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Preuve . ci-dessus □

Cela se généralise à tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$ puis sur $\mathbf{C}$

Cela se fait en plusieurs étapes.

Proposition : Soit $(x_{1,n}), (x_{2,n}), \cdots, (x_{p,n})$ p suites bornées, il existe α strictement croissante de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{N}$ telle que les suites $(x_{1,\alpha(n)}), (x_{2,\alpha(n)}), \cdots, (x_{p,\alpha(n)})$ convergent.

Preuve . Il existe β_1 strictement croissante de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{N}$ telle que la suite $(x_{1,\beta_1(n)})$ converge vers l_1. $(x_{2,\beta_1(n)})$ est bornée, donc il existe β_2 strictement croissante de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{N}$ telle que $(x_{2,\beta_1\circ\beta_2(n)})$ converge vers l_2. $(x_{1,\beta_1\circ\beta_2(n)})$ extraite d'une suite convergente vers l_1 converge vers l_1.

A la $k^{\text{ème}}$ étape, on a trouvé $\beta_1, \cdots, \beta_k$ strictement croissantes telles que les suites $(x_{i,\beta_1\circ\beta_2\circ\cdots\circ\beta_k(n)})$ convergent vers l_i pour $i = 1\cdots k$. La suite $(x_{k+1,\beta_1\circ\beta_2\circ\cdots\circ\beta_k(n)})$ est bornée donc il existe β_{k+1} strictement croissante de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{N}$ telle que la suite $(x_{k+1,\beta_1\circ\beta_2\circ\cdots\circ\beta_k\circ\beta_{k+1}(n)})$

converge vers l_{k+1}. Les suites $\left(x_{i,\beta_1\circ\beta_2\circ\cdots\circ\beta_k\circ\beta_{k+1}(n)}\right)$ extraites de suites convergentes convergent vers l_i pour $i = 1\cdots k$. Si on pose $\alpha = \beta_1\circ\beta_2\circ\cdots\circ\beta_{p-1}\circ\beta_p$, α est strictement croissante et les suites $\left(x_{1,\alpha(n)}\right), \left(x_{2,\alpha(n)}\right), \cdots, \left(x_{p,\alpha(n)}\right)$ convergent.
En considérant une suite complexe comme deux suites réelles (partie réelle et imaginaire) on obtient un résultat équivalent pour p suites complexes □

Proposition : Soit E un K espace vectoriel muni d'une base B_E et N_∞ la norme associée. Alors de toute suite bornée pour N_∞, on peut extraire une suite convergente.

Preuve . Si (x_n) est une suite bornée de E, les suites coordonnées $(x_{i,n})$ pour $i = 1\cdots\dim_K E$ sont bornées et la proposition suivante donne le résultat puisque la convergence pour la norme N_∞ équivaut à la convergence coordonnée à coordonnée.. □
Il suffirait maintenant d'utiliser le fait que toute les normes dans un **R** ou **C** espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes, résultat déjà cité mais dont on peut finir la démonstration. Rappelons

Théorème : Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Preuve . Soit N une norme sur E. On a montré que N est "majorée" par N_∞ soit

$$\exists\Lambda \geqslant 0, \forall x \in E, N(x) \leqslant \Lambda.N_\infty(x)$$

on a vu que si $(x_n) \overset{N_\infty}{\to} l$ alors $(x_n) \overset{N}{\to} l$. Il nous faut maintenant prouver l'existence de Λ tel que

$$N_\infty(x) \leqslant \Lambda'.N(x)$$

Supposons que Λ' n'existe pas, on aurait

$$\forall n \in \mathbf{N}, \exists x_n \in E, N_\infty(x_n) > (n+1).N(x_n)$$

(et donc $x_n \neq \vec{0}$). Posons $y_n = \dfrac{x_n}{N_\infty(x_n)}$, on a

$$N_\infty(y_n) = 1 \text{ et } N(y_n) < \frac{1}{n+1} \text{ soit } (y_n) \overset{N}{\to} \vec{0}$$

Or la suite (y_n) est bornée vis à vis de la norme N_∞. Il existe donc une suite extraite $\left(y_{\alpha(n)}\right)$ convergente vers un $y \in E$ pour la norme N_∞. Or, de $|N_\infty(y_n) - N_\infty(y)| \leqslant N_\infty(y_n - y)$ convergeant vers 0. On en déduit puisque $N_\infty(y_n) = 1$ que $N_\infty(y) = 1$. Or de $(x_n) \overset{N_\infty}{\to} l \Rightarrow (x_n) \overset{N}{\to} l$, on déduit que $(y_n) \overset{N}{\to} y$ et donc $y = \vec{0}$ ce qui contredit $N_\infty(y) = 1$. On peut en conclure l'existence de Λ' tel que $\forall x \in E$

$$N_\infty(x) \leqslant \Lambda'.N(x)$$

et l'équivalence des normes N et N_∞. □
Cette équivalence des normes permet enfin de généraliser le théorème de Bolzano Weirstrass à tout **R** ou **C** espace vectoriel de dimension finie.

Théorème : Soit E un K espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme N. Alors de toute suite bornée pour N, on peut extraire une suite convergente.

Remarque : Dans un tel espace on peut dire que toute suite bornée n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence est convergente, en effet soit (x_n) une telle suite et λ sa seule valeur d'adhérence. Si (x_n) ne converge pas vers λ,

$$\exists\varepsilon_0 > 0 \text{ et } \left(x_{\alpha(n)}\right) \text{ extraite de } (x_n), \forall n \in \mathbf{N}, \left\|x_{\alpha(n)} - \lambda\right\| \geqslant \varepsilon_0$$

$\left(x_{\alpha(n)}\right)$ est bornée et admet donc une suite extraite $\left(x_{\alpha\circ\beta(n)}\right)$ convergeant vers μ vérifiant $\|\lambda - \mu\| \geqslant \varepsilon_0$ et donc $\lambda \neq \mu$. Or μ est limite d'une suite extraite de (x_n) donc est une valeur d'adhérence de (x_n). (x_n) possède deux valeurs d'adhérence au moins ce qui est contraire aux hypothèses.
Cela ne se généralise pas au espace de dimension quelconque :

Exemple 10. *Considérons $E = \mathbf{R}[X]$ et pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i.X^i$*

$$N_\infty(P) = \max(|a_0|, \cdots, |a_n|)$$

et considérons la suite $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$. On a $N_\infty(X^n) = 1$. Supposons qu'il existe $X^{\alpha(n)}$ convergent pour N_∞ vers un polynôme P. Soit (P_n) une suite convergeant vers une limite Q, considérons pour p donné la suite $(a_{n,p})_{n\in\mathbf{N}}$ des coefficients de degré p de (P_n) et q_p le coefficient de degré p de Q. De

$$|a_{n,p} - q_p| \leqslant N_\infty(P_n - Q)$$

on déduit

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n,p} = q_p.$$

Appliqué à la suite $\left(X^{\alpha(n)}\right)$ et P, on en déduit $P = 0$. Or on a $N_\infty(P) = \lim_{n\to+\infty} N_\infty\left(X^{\alpha(n)}\right) = 1$ en contradiction avec $P = 0$. On ne peut donc extraire de (X^n) une suite convergente.

2. Suite de Cauchy

   L'idée de ce chapitre est de dégager un critère qui, à partir des termes d'une suite, et seulement à partir d'eux, permet de dire si cette suite converge ou non, cela sans avoir à prendre en compte une éventuelle limite. Ce critère est le critère de Cauchy, les suites vérifiant ce critère sont dites suites de Cauchy. Intuitivement, ce sont des suites qui se comportent exactement comme des suites convergentes, si l'espace est "sans trous", complet, ces suites convergeront. En tant que tel, ce critère est malcommode, on l'utilise par l'intermédiaire des séries (convergence absolue).

   Dans ce qui suit E est un espace normé et $\|\ \|$ est la norme de E.

   (a) Définition des suites de Cauchy

   La définition des suites de Cauchy est la suivante

   Définition : Une suite (x_n) de E est dite de Cauchy ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n, p \geqslant n_0, \|x_n - x_p\| < \varepsilon$$

   Cette définition peut intuitive indique en fait que les termes de la suite s'accumulent les uns sur les autres. Plus précisément, on a la propriété suivante :

Proposition : Une suite est de Cauchy ssi

$$\forall \left(x_{\alpha(n)}\right) \text{ extraite de } (x_n), \left(x_n - x_{\alpha(n)}\right) \text{ converge vers } \vec{0}$$

et donc (puisque $\left(x_{\beta(n)} - x_{\alpha(n)}\right) = \left(x_{\beta(n)} - x_n\right) + \left(x_n - x_{\alpha(n)}\right)$)

$$\forall \left(x_{\alpha(n)}\right), \left(x_{\beta(n)}\right) \text{ extraites de } (x_n), \left(x_{\beta(n)} - x_{\alpha(n)}\right) \text{ converge vers } \vec{0}$$

Preuve .

- Si (x_n) de Cauchy, soit $\left(x_{\alpha(n)}\right)$ extraite de (x_n), soit $\varepsilon > 0$, on peut écrire

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n, p \geqslant n_0, \|x_n - x_p\| < \varepsilon$$

  entre autres si $n \geqslant n_0, \alpha(n) \geqslant n \geqslant n_0$, finalement

$$\forall n \geqslant n_0, \left\|x_n - x_{\alpha(n)}\right\| < \varepsilon$$

  soit $\left(x_n - x_{\alpha(n)}\right)$ converge vers $\vec{0}$

- Réciproquement, si (x_n) non de Cauchy, $\exists \varepsilon_0 > 0$

$$\forall n_0 \in \mathbf{N}, \exists n, p \geqslant n_0, \|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon_0$$

Prenons $n_0 = 0$ et soit $\alpha(0), \beta(0)$ le couple n, p correspondant. Supposons avoir construit α et β strictement croissant de 0 à k avec $\forall i \in \{0, \cdots, k\}, \left\|x_{\alpha(i)} - x_{\beta(i)}\right\| \geqslant \varepsilon_0$.
Prenons $n_0 = \max(\alpha(k), \beta(k)) + 1$ et soit $\alpha(k+1), \beta(k+1)$ le couple n, p correspondant. On a bien α et β strictement croissant de 0 à $k+1$ et

$$\forall i \in \{0, \cdots, k+1\}, \left\|x_{\alpha(i)} - x_{\beta(i)}\right\| \geqslant \varepsilon_0.$$

Par récurrence, on a construit deux suites extraites de (x_n) vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left\|x_{\alpha(n)} - x_{\beta(n)}\right\| \geqslant \varepsilon_0$$

Entre autres $\left(x_{\alpha(n)} - x_{\beta(n)}\right)$ ne converge pas vers $\vec{0}$. Comme $\left(x_{\alpha(n)} - x_{\beta(n)}\right) = \left(x_{\alpha(n)} - x_n\right) + \left(x_n - x_{\beta(n)}\right)$, on en déduit que $\left(x_{\alpha(n)} - x_n\right)$ ou $\left(x_n - x_{\beta(n)}\right)$ ne converge pas vers $\vec{0}$. □

(b) Propriétés des suites de Cauchy
Les suites de Cauchy ont les mêmes propriétés que les suites convergentes.

Proposition : Les suites de Cauchy sont bornées.

Preuve . Soit (x_n) de Cauchy, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n, p \geqslant n_0, \|x_n - x_p\| < 1$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, \|x_n\| \leqslant \max\{\|x_0\|, \cdots, \|x_{n_0}\|, \|x_{n_0}\| + 1\}$$

et la suite est bornée □

Proposition : Une combinaison linéaire de suites de Cauchy est de Cauchy, dans une algèbre normée, un produit de deux suites de Cauchy est de Cauchy.

Preuve . Les preuves sont identiques aux preuves correspondantes pour les suites convergentes, le rôle de la limite étant rempli par le terme x_p de la suite. □
On remarque également que toute suite convergente est de Cauchy, en effet

Proposition : Si (x_n) converge, alors (x_n) est de Cauchy

Preuve . Si (x_n) converge vers l, alors $\forall \left(x_{\alpha(n)}\right)$ extraite de (x_n), $\left(x_{\alpha(n)}\right)$ converge vers l et $\left(x_n - x_{\alpha(n)}\right)$ converge vers $\vec{0}$.
On peut également écrire directement que si $\varepsilon > 0$ est donné,

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, \|x_n - l\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$\forall n, p \geqslant n_0, \|x_n - x_p\| \leqslant \|x_n - l\| + \|x_p - l\| < \varepsilon$$

et le résultat. □
On constate que si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence elle converge. Une suite de Cauchy est donc soit convergente, soit sans valeur d'adhérence. En fait une suite de Cauchy non convergente est une suite qui, si on considère qui suite convergente vers un $l \in E$, "pointe" vers ce l, pointe vers une "case vide".

(c) Cas de $\mathbf{R}$, complétude de $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$ et des espaces de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
Dans $\mathbf{R}$, toute suite bornée a une valeur d'adhérence (théorème de Bolzano Weirstrass), donc toute suite de Cauchy, étant bornée, a une valeur d'adhérence et donc converge. Cela peut être dit de tout espace normée où le théorème de Bolzano Weirstrass est vrai et donc de tout les espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Théorème : Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, alors $\forall (x_n) \in E^{\mathbf{N}}$

$$(x_n) \text{ de Cauchy } \Leftrightarrow (x_n) \text{ convergente}$$

Ce théorème, dans le cas de $\mathbf{R}$ est équivalent à l'existence d'une borne supérieure d'une partie non vide majorée, autrement dit de la complétude de $\mathbf{R}$ ([18]). Cela permet d'écrire la définition d'un espace complet

Définition : On appelle espace complet ou espace de Banach un espace vectoriel normé E où on a l'équivalence, $\forall (x_n) \in E^{\mathbf{N}}$

$$(x_n) \text{ de Cauchy } \Leftrightarrow (x_n) \text{ convergente}$$

Les espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ de dimension finie sont donc complets.

(d) Un exemple d'espace complet de dimension ∞
Considérons $\mathcal{B}[a,b]$ le $\mathbf{R}$ espace vectoriel des fonctions bornées sur $[a,b]$ et $\| \|_\infty$ (que l'on notera $\| \|$ dans ce paragraphe) la norme ([19]) définie par

$$\|f\|_\infty = \|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Soit (f_n) une suite de fonctions dans $\mathcal{B}[a,b]$ qui soit de Cauchy. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n, p \geqslant n_0, \|f_n - f_p\| < \varepsilon$$

La technique générale consiste à construire la limite, à vérifier qu'elle est dans E puis à montrer la convergence effective.

- Pour $x \in [a,b]$, la suite $(f_n(x))$ vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n, p \geqslant n_0, |f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \|f_n - f_p\| < \varepsilon$$

  donc est de Cauchy. $\mathbf{R}$ étant complet, il existe une limite qu'on va noter $l(x)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = l(x)$$

- (f_n) est de Cauchy donc est bornée, il existe $M \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b], \forall n \in \mathbf{N}, |f_n(x)| \leqslant \|f_n\| \leqslant M$$

  soit finalement

$$\forall x \in [a,b], |l(x)| \leqslant M$$

  et $l \in \mathcal{B}[a,b]$
- Soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n, p \geqslant n_0, \forall x \in [a,b], |f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \|f_n - f_p\| < \varepsilon$$

  Donc

$$\forall n \geqslant n_0, \forall p \geqslant n_0, \forall x \in [a,b], |f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \varepsilon$$

[18] Suivant les liens $\mathbf{R}$ complet $\longleftrightarrow$ toute suite monotone bornée converge $\longleftrightarrow$ Toute suite bornée admet une valeur d'adhérence $\longleftrightarrow$ Toute suite de Cauchy de $\mathbf{R}$ converge

[19] exercice !

et entre autres, en faisant tendre p vers $+\infty$

$$\forall n \geqslant n_0, \forall x \in [a,b], |f_n(x) - l(x)| \leqslant \varepsilon$$

soit enfin

$$\forall n \geqslant n_0, \|f_n - l\| \leqslant \varepsilon$$

Finalement, on a bien $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ dans $(E, \| \, \|)$

Cet espace vectoriel est donc bien complet pour la norme $\| \, \|$.

(e) Un exemple d'espace non complet.
Considérons $E = \mathbf{R}[X]$ et pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i.X^i$

$$N(P) = \max(|a_0|, \cdots, |a_n|)$$

Soit (P_n) une suite convergeant vers une limite Q, considérons pour p donné la suite $(a_{n,p})_{n\in\mathbf{N}}$ des coefficients de degré p de (P_n) et q_p le coefficient de degré p de Q. On a vu que de

$$|a_{n,p} - q_p| \leqslant N(P_n - Q)$$

on peut en déduire

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n,p} = q_p.$$

Considérons la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k(k+1)}$$

On a pour $n \geqslant p \in \mathbf{N}$

$$N(P_n - P_p) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = p \\ \sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \end{cases} \leqslant \frac{1}{p+1} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{p+1}$$

Donc si $\varepsilon > 0$ est donné, pour $n \geqslant p \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, on a $N(P_n - P_p) < \varepsilon$ et la suite (P_n) est de Cauchy.

Or si (P_n) convergeait vers un polynôme Q, les coefficients de Q serait limite de ceux de P_n, et ceux ci forment une suite stationnaire en $\frac{1}{k.(k+1)}$, le coefficient de degré k de Q serait donc égal à $\frac{1}{k.(k+1)}$ et Q serait de degré "infini" ce qui est absurde.

1.5. Topologie.

1. Topologie d'un espace
   $E, \| \, \|$ est un espace normé sur $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

   (a) Boules, voisinages
   Définition : Si $a \in E$ et $r > 0$, on définit la boule ouverte de centre a de rayon r, la boule fermée de centre a de rayon r et la sphère de centre a de rayon r par

$$B(a,r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$$
$$\overline{B}(a,r) = \{x \in E, \|x - a\| \leqslant r\}$$
$$S(a,r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$$

   On désigne par $B, \overline{B}$ et S les boules et sphère de centre $\vec{0}$ de rayon 1.
   Remarque : On peut exprimer la relation d'équivalence entre deux normes N_1 et N_2 par des inclusions de boules :

$$N_1 \sim N_2 \Leftrightarrow \exists r_1, r_2 > 0 / \begin{cases} B_{N_1}\left(\vec{0}, r_1\right) \subset B_{N_2}\left(\vec{0}, 1\right) \\ B_{N_2}\left(\vec{0}, r_2\right) \subset B_{N_1}\left(\vec{0}, 1\right) \end{cases}$$

En effet, en notant que si $x \neq \vec{0}, \lambda.\frac{x}{\|x\|}$ est de norme $|\lambda|$, la première inclusion donne

$$\forall x \in E, N_2(x) \leqslant \frac{N_1(x)}{r_1}$$

et la deuxième donne

$$\forall x \in E, N_1(x) \leqslant \frac{N_2(x)}{r_2}$$

Définition : Soit $x \in E$ et $V \subset E$, on dira que V est un voisinage de x et on écrira $V \in \mathcal{V}(x)$ ssi V contient une boule de centre x, soit encore ssi $\exists \alpha > 0, B(x, \alpha) \subset V$ soit ssi

$$\exists \alpha > 0, \forall y \in E, \|y - x\| < \alpha \Rightarrow y \in V$$

Proposition : Si $V \in \mathcal{V}(x)$ alors $\forall X \subset E, V \cup X \in \mathcal{V}(x)$, si $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x), V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$

Les voisinages d'un point sont stables par intersection finie et par réunion.

Remarque : Si N est une norme équivalente à $\| \ \|$, toute boule ouverte de centre x pour N (resp. $\| \ \|$) contient une boule ouverte de centre x pour $\| \ \|$ (resp. N). x admet donc les mêmes voisinages pour N et $\| \ \|$. Donc deux normes équivalentes induisent la même notion de voisinages de même qu'elles induisaient la même notion de convergence. Cette notion peut d'ailleurs s'exprimer simplement à l'aide des voisinages :

Proposition : Soit $(x_n) \in E^{\mathbf{N}}$ et $l \in E$, (x_n) convergera vers l ssi

$$\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0, x_n \in V$$

Preuve . Dans le sens direct, si $V \in \mathcal{V}(l)$,

$$\exists \varepsilon > 0, B(l, \varepsilon) \subset V$$

et comme

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, \|x_n - l\| < \varepsilon$$

on obtient bien $\forall n \geqslant n_0, x_n \in V$

La réciproque se fait de même. □

(b) Fermés, Ouverts

Définition : Soit $O \subset E$, O sera dit ouvert de E ssi O est voisinage de tous ses points, autrement dit ssi

$$\forall x \in O, \exists \alpha > 0, \forall y \in E, \|y - x\| < \alpha \Rightarrow y \in O$$

La **topologie** de E est l'ensemble des ouverts de E.

Exemple 11. • *$E, \varnothing$ sont des ouverts de E.*

- *Si $\alpha > 0$ et $a \in E$, la boule ouverte $B(a, \alpha)$ est un ouvert de E.*
  En effet, soit x un élément de cette boule, on a pour tout y de E, $\|y - a\| < \|y - x\| + \|x - a\|$ d'où $\|y - a\| < \alpha$ dès que $\|y - x\| < \alpha - \|x - a\|$. On a donc $B(x, \alpha - \|x - a\|) \subset B(a, \alpha)$. Cette dernière est donc un ouvert de E.

Définition : Soit $F \subset E$, F sera dit fermé de E ssi F est le complémentaire d'un ouvert de E.

Exemple 12. • *$E, \varnothing$ sont des fermés de E.*

- *Si $\alpha > 0$ et $a \in E$, la boule fermée $\overline{B}(a, \alpha)$ est un fermé de E.*
  En effet, soit x un élément n'appartenant pas à cette boule, on a pour tout y de E, $\|y - a\| > \|x - a\| - \|y - x\|$ d'où $\|y - a\| > \alpha$ dès que $\|y - x\| < \|x - a\| - \alpha$. On a donc $B(x, \|x - a\| - \alpha) \subset E \backslash \overline{B}(a, \alpha)$. $E \backslash \overline{B}(a, \alpha)$ est donc un ouvert de E et $\overline{B}(a, \alpha)$ un fermé.

On peut caractériser simplement les fermés et les ouverts en termes de suites ; un fermé est une partie stable par passage à la limite : Toute suite de ce fermé convergente converge dans ce fermé.

Théorème : Soit $F \subset E$, F est un fermé ssi $\forall (x_n) \in F^{\mathbf{N}}$, (x_n) convergente vers $l \in E \Rightarrow l \in F$

Preuve . Supposons F fermé, soit $(x_n) \in F^{\mathbf{N}}$, (x_n) convergente vers $l \in E$. Supposons $l \notin F$, l appartient à $E \backslash F$ qui est un ouvert, donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(l, \varepsilon) \subset E \backslash F$. Or il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, x_n \in B(l, \varepsilon)$$

On aurait dans ce cas $x_{n_0} \in F$ et $x_{n_0} \in B(l, \varepsilon) \subset E \backslash F$ ce qui est contradictoire. Donc $l \in F$.

Supposons maintenant F non fermé, $E \backslash F$ n'est pas un ouvert, il existe $l \in E \backslash F$ tel que $E \backslash F$ non voisinage de l. Autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0, B(l, \varepsilon) \not\subset E \backslash F \text{ soit } B(l, \varepsilon) \cap F \neq \varnothing$$

Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$, il existe $x_n \in B\left(l, \dfrac{1}{n+1}\right) \cap F$. La suite (x_n) ainsi construite est dans F et converge vers $l \notin F$. On a bien prouvé que si $\left(\forall (x_n) \in F^{\mathbf{N}}, (x_n)\text{ convergente vers } l \in E \Rightarrow l \in F\right)$ alors F fermé. □

Ce théorème est particulièrement important car donnant un moyen extrêmement pratique pour savoir si un ensemble de E est un fermé ou non. ([20])

Exemple 13. *On va montrer que si $(E, \| \|)$ est un espace normé sur* **R** *ou* **C** *et si F est un sous espace* **de dimension finie**, *alors F est un fermé. Le raisonnement est simple techniquement. $(F, \| \|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie donc il est complet. Soit $(x_n) \in F^{\mathbf{N}}$ une suite convergeant vers $l \in E$. Il s'agit de prouver $l \in F$.*

Preuve . *On a*

→ *(x_n) converge vers $l \in E$ donc*

→ *(x_n) est une suite de Cauchy donc*

→ *(x_n) est une suite de Cauchy de l'espace vectoriel normé* **complet** *F (on utilise en fait l'équivalence des normes)*

→ *(x_n) converge vers $l' \in F$ dans l'espace vectoriel normé* **complet** *F*

→ *$\|x_n - l'\|$ converge vers 0*

→ *(x_n) converge vers $l' \in F$ dans E*

→ *$l = l' \in F$ et le résultat.* □

Proposition : Opérations ensemblistes
→ si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts, $\cup_{i \in I} O_i$ est un ouvert,
→ si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés, $\cap_{i \in I} F_i$ est un fermé,
→ si $(O_1, \cdots, O_p)$ est une famille de p ouverts de E, $\cap_{i=1}^{p} O_i$ est un ouvert de E,
→ si $(F_1, \cdots, F_p)$ est une famille de p fermés de E, $\cup_{i=1}^{p} F_i$ est un fermé de E.

Preuve . Si $x \in \cup_{i \in I} O_i$, x appartient à un O_{i_0}, $\cup_{i \in I} O_i = O_{i_0} \cup (\cup_{i \in I} O_i)$ est un voisinage de x d'après les propriétés des voisinages et $\cup_{i \in I} O_i$ est bien un ouvert de E.

De $\cap_{i \in I} F_i = E \backslash (\cup_{i \in I} (E \backslash F_i))$, on déduit le résultat sur les fermés.

De même, si $x \in \cap_{i=1}^{p} O_i$, on a pour tout i O_i voisinage de x, la même proposition nous donne $\cap_{i=1}^{p} O_i$ voisinage de x et le résultat.

$\cup_{i=1}^{p} F_i = E \backslash (\cap_{i=1}^{p} (E \backslash F_i))$ donne le résultat sur les fermés. □

[20] La plupart des démonstrations peuvent se faire soit à l'aide des fermés (plus intuitif souvent mais parfois plus technique) et des suites soit en utilisant les ouverts, voisinages et "ε"

(c) Adhérence d'un ensemble, point adhérent, Intérieur

Un fermé est donc une partie de E "stable par passage à la limite". Pour $A \subset E$, il est intéressant de considérer l'ensemble des éléments "atteignables" par A c'est à dire limite d'une suite d'éléments de A. C'est l'adhérence de A

Définition : On appelle adhérence de A l'ensemble

$$\bar{A} = \left\{ x \in E, \exists \left(x_n\right) \in A^{\mathbf{N}}, \lim_{n \to +\infty} x_n = x \right\}$$

un élément appartenant à $\bar{A}$ sera dit élément adhérent à A. On a $A \subset \bar{A}$.

Remarque : D'après ce qui précède, on a immédiatement F fermé$\Leftrightarrow \bar{F} = F$. De même, on a par définition même le fait que $A \subset A' \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{A}'$

Cela semble indiquer que $\bar{A}$ est un fermé ce que l'on va prouver. Pour cela on caractérise tout d'abord les éléments de $\bar{A}$ en terme de voisinages.

Proposition : Soit $A \subset E$ et $x \in E$, alors

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B\left(x, \varepsilon\right) \cap A \neq \varnothing$$

Preuve . $\Rightarrow$: Soit $x \in \bar{A}$, $\exists \left(x_n\right) \in A^{\mathbf{N}}, \lim_{n \to +\infty} x_n = x$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \|x_n - x\| < \varepsilon$$

Entre autres $x_{n_0} \in B\left(x, \varepsilon\right) \cap A$ ce qu'il fallait démontrer.

$\Leftarrow$: Réciproquement, soit $x \in E$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, B\left(x, \varepsilon\right) \cap A \neq \varnothing$$

Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$, il existe

$$x_n \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap A$$

La suite $\left(x_n\right)$ ainsi construite vérifie

$$\left(x_n\right) \in A^{\mathbf{N}} \text{ et } \|x_n - x\| < \frac{1}{n+1}$$

soit $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$ et le résultat. □

Cela permet de montrer que l'adhérence est un fermé et que c'est le plus petit fermé contenant A

Proposition : Soit $A \subset E$, alors $\bar{A}$ est un fermé et si $A \subset F$ fermé, alors $\bar{A} \subset F$

Preuve . Remarquons que la dernière assertion est claire, si $A \subset F$ alors $\bar{A} \subset \bar{F} = F$. Montrons que $\bar{A}$ est un fermé. Soit x limite d'une suite d'éléments de $\bar{A}$, il existe $\left(x_n\right) \in \bar{A}^{\mathbf{N}}$ convergeant vers x. Soit $\varepsilon > 0$, on veut montrer que $B\left(x, \varepsilon\right) \cap A \neq \varnothing$. Or il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\|x_{n_0} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$x_{n_0} \in \bar{A}$ donc il existe

$$y \in A \cap B\left(x_{n_0}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

On a $\|y - x\| < \varepsilon$ et donc $y \in B\left(x, \varepsilon\right) \cap A$ et le résultat. □

On peut généraliser et définir la notion d'intérieur d'une partie :

Définition : Si $A \subset E$, on définit $\overset{\circ}{A}$ par $\overset{\circ}{A} = E \backslash \left(\overline{E \backslash A}\right)$

On constate que $\overset{\circ}{A}\subset A$ et que $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert. De plus, d'après les propriétés de l'adhérence, $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert et c'est le plus grand ouvert inclus dans A. $\overset{\circ}{A}$ peut se caractériser simplement :

Proposition : $\overset{\circ}{A}=\{x\in A,\exists\varepsilon>0,B(x,\varepsilon)\subset A\}$ soit encore $A=\{x\in A,A\in\mathcal{V}(x)\}$

Preuve . Cela découle directement de la caractérisation

$$x\in\overline{(E\backslash A)}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,B(x,\varepsilon)\cap(E\backslash A)\neq\varnothing$$

Donc

$$x\in\overset{\circ}{A}\Leftrightarrow\exists\varepsilon>0,B(x,\varepsilon)\cap(E\backslash A)=\varnothing$$

soit

$$x\in\overset{\circ}{A}\Leftrightarrow\exists\varepsilon>0,B(x,\varepsilon)\subset A$$

et le résultat. □

2. Compacité, complétude

   E est un K espace vectoriel normé

   (a) Sous ensemble complet d'un espace vectoriel normé

   Définition : On appelera complet un sous ensemble A de E tel que toute suite de Cauchy à valeurs dans A est convergente dans A.

   Par définition même un complet est donc "stable par passage à la limite", toute suite $(x_n)\in A^{\mathbf{N}}$ convergente est de Cauchy donc convergente dans A. On peut énoncer

Proposition : A complet est fermé.

Plus précisément

Proposition : Si $A'\subset A$ avec A complet alors $\bar{A}'$ est complet.

Preuve . En effet, toute suite de Cauchy de $\bar{A}'$ est une suite de Cauchy de A qui converge donc et qui converge dans $\bar{A}'$ puisque ce dernier ensemble est un fermé. □

Une famille de sous ensembles complets d'un K espace vectoriel normé E est constituée par exemple par les sous espaces vectoriels de dimension finie (cf ci-dessus).

   (b) Compact au sens de Bolzano Weirstrass

   Une grande propriété de $\mathbf{R}$ est que toute suite bornée admet une valeur d'adhérence. On peut prouver ([21]) que cette propriété caractérise les espaces vectoriels de dimension finie. Mais il existe dans un espace vectoriel normé E donné des ensembles C ([22]) tels que toute suite à valeurs dans C admet une suite extraite convergente i.e une valeur d'adhérence. Ce sont les compacts au sens de Bolzano Weirstrass.

   Définition : Soit $C\subset E$, C est dit compact ssi de toute suite à valeurs dans C, on peut extraire une suite convergente **dans** C.

Proposition : On constate qu'un compact est fermé, borné et complet.

Preuve . Soit une suite de Cauchy de C, elle admet une valeur d'adhérence dans C puisque C est compact, donc elle converge puisque de Cauchy et ayant une valeur d'adhérence. C est donc aussi fermé puisqu'un complet est fermé. Supposons C non borné, on aurait

$$\forall n\in\mathbf{N},\exists x_n\in C,\|x_n\|\geqslant n$$

[21] théorème de Riesz, voir plus loin

[22] Ne pas confondre $C\equiv$ **C**ompact avec $\mathbf{C}\equiv$ Complexes

Cette suite (x_n) admettrait une suite extraite $\left(x_{\alpha(n)}\right)$ convergente dans C donc bornée. Or on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left\|x_{\alpha(n)}\right\| \geqslant \alpha(n) \geqslant n \to +\infty$$

ce qui contredit $\left(x_{\alpha(n)}\right)$ bornée. C est borné. □

De même que dans les complets, tout fermé inclus dans un compact est compact. (si (x_n) est une suite dans ce fermé, elle admet une sous suite extraite convergente dans le compact et cette sous suite converge en fait dans le fermé puisqu'à valeurs dans ce fermé).

L'intérêt des compacts est que les phénomènes "limites" (sup, extrema d'une fonction, etc) seront réalisé dans ce compact.

Exemple 14. *Soit C un compact et $x \in E$, alors $\exists y \in C, d(x, C) = \|x - y\|$*

Preuve . *Soit $d = d(x, C) = \sup_{y \in C} \|x - y\|$. Il s'agit de prouver que ce "sup" est un "max". Soit $n \in \mathbf{N}$, il existe $y_n \in C$ tel que*

$$d \leqslant \|x - y_n\| < d + \frac{1}{n+1}$$

la suite (y_n) admet une suite extraite convergente vers un $y \in C$. De

$$\forall n \in \mathbf{N}, d \leqslant \left\|x - y_{\alpha(n)}\right\| < d + \frac{1}{\alpha(n) + 1}$$

on déduit $\|x - y\| = d$ et le résultat. □

(c) Cas des espaces de dimension finie

On a déjà vu que dans les K espaces vectoriels normés de dimension finie, toutes les normes étaient équivalentes (ce qui veut dire qu'il est inutile de préciser une norme lorsque l'on veut parler de convergence, continuité ...).

Par ailleurs, ces espaces sont complets, donc les ensembles complets d'un tel espace sont les fermés.

Les compacts dans ces espaces sont aussi parfaitement connus :

Proposition : Soit E un K espace vectoriel normé de dimension finie, alors

$$C \text{ compact} \Leftrightarrow C \text{ fermé borné}$$

Preuve . Le sens $\Rightarrow$ a été vu plus haut. Soit C fermé borné et (x_n) une suite dans C. Cette suite est bornée, le théorème de Bolzano Weirstrass permet d'affirmer l'existence d'une sous suite convergente $\left(x_{\alpha(n)}\right)$. Cette suite est dans C qui est fermé donc converge dans C. Finalement il existe bien une sous suite de (x_n) convergente dans C et C est bien un compact. □

Ce qu'il y a de remarquable est que cette propriété caractérise les espaces de dimension finie. C'est le théorème de Riesz :

Théorème : Soit E un K espace vectoriel normé, E est de dimension finie ssi les compacts sont les fermés bornés.

Preuve . Celle ci est complexe et assez technique ([23]). Le sens direct a été vu. Soit maintenant un E un K espace vectoriel normé tel que les compacts sont les fermés bornés. On notera $\| \ \|$ la norme. La boule

$$\bar{B} = \{x \in E, \|x\| \leqslant 1\}$$

est donc compacte.

[23] Cette démonstration ne fait pas partie du programme de première année Eco.

i. **Lemme** : Il existe $p \geqslant 1$ et $e_1, \cdots, e_p \in \bar{B}$ telle que

$$\bar{B} \subset \cup_{i=1}^{p} \bar{B}\left(e_i, \frac{1}{2}\right)$$

En effet, considérons la suite (e_k) construite comme suit : $e_1 \in \bar{B}$, et pour $k \geqslant 2$, $e_k \in \bar{B} \backslash \left(\cup_{i=1}^{k-1} \bar{B}\left(e_i, \frac{1}{2}\right)\right)$.
Soit il existe $p \geqslant 1$ tel que $\bar{B} \backslash \left(\cup_{i=1}^{p} \bar{B}\left(e_i, \frac{1}{2}\right)\right) = \varnothing$ et le lemme est prouvé, soit on construit une suite $(e_n)_{n \geqslant 1}$. Cette suite vérifie

$$\forall n \geqslant 1, e_n \notin \cup_{i=1}^{n-1} \bar{B}\left(e_i, \frac{1}{2}\right)$$

et donc

$$\forall n, m \geqslant 1, n \neq m \Rightarrow \|e_n - e_m\| > \frac{1}{2}$$

Or la suite (e_n) est dans $\bar{B}$ compact doit admet une valeur d'adhérence ; il existe $\left(e_{\alpha(n)}\right)$ convergente. Mais alors, **entre autres** ([24]), la suite $\left(e_{\alpha(n+1)} - e_{\alpha(n)}\right)$ converge vers $\vec{0}$ alors qu'elle vérifie

$$\forall n \geqslant 1, \left\|e_{\alpha(n+1)} - e_{\alpha(n)}\right\| > \frac{1}{2}$$

ce qui est absurde. le lemme est donc acquis.

ii. La famille $(e_i, i = 1 \cdots p)$ engendre tous les vecteurs de $\bar{B}$
Considérons $x \in \bar{B}$, on construit les suites $(x_n) \in \bar{B}^{\mathbf{N}}, (y_n) \in \langle e_1, \cdots, e_p \rangle^{\mathbf{N}}$ par

$$x_0 = x, \; y_0 = \vec{0}$$

et pour $n \in \mathbf{N}$, il existe $k \in \{1, \cdots, p\}$ tel que $x_n \in \bar{B}\left(e_k, \frac{1}{2}\right)$ puisque $x_n \in \bar{B} \subset \cup_{i=1}^{p} \bar{B}\left(e_i, \frac{1}{2}\right)$. On pose

$$x_{n+1} = 2.(x_n - e_k) \in \bar{B}$$

puisque $\|x_{n+1}\| \leqslant 2.\frac{1}{2}$ soit 1,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{e_k}{2^n} \in \langle e_1, \cdots, e_p \rangle$$

On peut noter que

$$y_{n+1} - y_n = \frac{e_k}{2^n} = \frac{x_n}{2^n} - \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}}$$

soit par récurrence

$$y_{n+1} + \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} = y_n + \frac{x_n}{2^n} = y_0 + x_0 = x$$

De cela on déduit $\|y_n - x\| = \left\|\frac{x_n}{2^n}\right\| \leqslant \frac{1}{2^n}$. Finalement, on obtient $\lim_{n \to +\infty} y_n = x$.
On a donc $x \in \overline{\langle e_1, \cdots, e_p \rangle} = \langle e_1, \cdots, e_p \rangle$ puisqu'un sous espace vectoriel de dimension finie est fermé et le résultat est acquis.

iii. $\langle e_1, \cdots, e_p \rangle = E$. En effet, soit $x \in E$, si $x = \vec{0}, x \in \langle e_1, \cdots, e_p \rangle$, sinon

$$\frac{x}{\|x\|} \in \bar{B} \subset \langle e_1, \cdots, e_p \rangle \text{ et donc } x \in \langle e_1, \cdots, e_p \rangle$$

On a donc $E \subset \langle e_1, \cdots, e_p \rangle \subset E$ et E de dimension finie. □

[24] ce n'est pas une équivalence

1.6. Séries. Le critère de Cauchy est un critère qui peut sembler séduisant à priori ; condition nécessaire et suffisante (dans un espace complet) de convergence ne mettant en jeu que les termes de la suite. Mais son utilisation pratique tel que est compliquée, l'évaluation de $\|x_n - x_p\|$ est à priori délicate. L'idée des séries est d'écrire

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k - x_{k-1}$$

Si on considère n et $p = n + q$ avec $q \geqslant 1$, on aura

$$x_p - x_n = \sum_{k=n+1}^{n+q} x_k - x_{k-1}$$

et donc

$$\|x_p - x_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+q} x_k - x_{k-1} \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+q} \|x_k - x_{k-1}\|$$

cela correspond à la différence de Cauchy $|s_p - s_n|$ avec

$$s_n = \|x_0\| + \sum_{k=1}^{n} \|x_k - x_{k-1}\|$$

suite réelle croissante donc facile à étudier.

1. Séries

   On se place dans un K espace vectoriel normé $E, \|\ \|$

   (a) Définition des séries

   Définition : On appelle série de terme général (u_n) la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n \in \mathbf{N}}$

   Cette série pourra être désignée par $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n \in \mathbf{N}}$, $\sum u_n$ ou parfois $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. u_n est appelé terme général de la série. La somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelé somme partielle de la série.

   De l'égalité valable pour toute suite $(x_n) \in E^{\mathbf{N}}$

   $$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k - x_{k-1}$$

   on déduit que toute suite est une série. La nuance résidera lorsqu'on se placera dans une algèbre (typiquement $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), le produit de deux séries ne consistera pas à faire le produit terme à terme des suites $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n \in \mathbf{N}}$ correspondantes.

   (b) Opérations sur les séries, combinaison linéaire

Proposition : La combinaison linéaire $\lambda.\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n \in \mathbf{N}} + \mu.\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est la série

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda.u_k + \mu.v_k\right)_{n \in \mathbf{N}}$$

Il n'en est pas de même du produit dans le cas d'une algèbre. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. La suite

$$W_n = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) . \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$

est une série de terme général w_n avec

$$w_{n+1} = W_{n+1} - W_n = u_{n+1}.\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right).v_{n+1} + u_{n+1}.v_{n+1}$$

expression peu simple. Intuitivement l'idée est d'aboutir à une série qui lorsqu'on étend la somme à tout $\mathbf{N}$ contient tous les termes $u_k.v_l$ et ce une seule fois. On s'inspire du développement des séries formelles en classant les termes $u_k.v_l$ par profondeur, celle ci étend définie par $k+l$.

Définition : On appelle série produit $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ la série $\left(\sum_{k=0}^{n} w_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ de terme général

$$w_n = \sum_{\substack{k,l\in\mathbf{N} \\ k+l=n}} u_k.v_l = \sum_{k=0}^{n} u_k.v_{n-k}$$

Ce produit, distinct du produit terme à terme des suites s'appelle le produit de Cauchy. La suite (w_n) est appelée produit de convolution des suites (u_n) et (v_n).

Proposition : Le produit de Cauchy est associatif, distributif à gauche et à droite sur l'addition et admet la suite constante 1 (i.e la série $\sum \delta_n^0$) comme unité.

([25])

Preuve . La preuve consiste simplement à utiliser la formule $\sum u_n.\sum v_n = \sum w_n$ avec

$$w_n = \sum_{\substack{k,l\in\mathbf{N} \\ k+l=n}} u_k.v_l = \sum_{k=0}^{n} u_k.v_{n-k}$$

Seule l'associativité nécessite un calcul montrant que

$$\sum u_n.\left(\sum v_n.\sum w_n\right) = \left(\sum u_n.\sum v_n\right).\sum w_n = \sum t_n$$

ce qui se traduit par

$$\sum_{k+l=n} u_k.\left(\sum_{i+j=l} v_i.w_j\right) = \sum_{l+j=n}\left(\sum_{k+i=l} u_k.v_i\right).w_j = \sum_{k+i+j=n} u_k.v_i.w_j = t_n$$

Le reste est immédiat (exercice donc) □

Ce produit définit donc lorsque E est une algèbre une nouvelle algèbre des séries distincte de l'algèbre des suites à valeurs dans E ; les éléments, la somme, le produit par un scalaire sont identiques, mais les produits internes ne sont pas les mêmes ce qui ne définit donc pas la même structure.

On peut définir des opérations spécifiques aux séries, la plus importante est la troncature

Définition : Soit $\sum u_n$, on appelle série tronquée des n_0 premiers termes la série définie pour $n \geqslant n_0$ par

$$\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)$$

(c) Convergence des séries

[25] $\delta_n^k = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ 1 \text{ si } n = k \end{cases}$

Définition : Une série sera dite convergente si elle converge en tant que suite. La limite $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k$ sera notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ([26])

Remarque : De $u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ on obtient

$$\sum u_n \text{ converge } \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n) = \vec{0}$$

([27])

Les théorèmes d'arithmétique des limites permettent d'énoncer

Proposition : Une combinaison linéaire de séries convergentes converge vers la combinaison linéaire des limites.

Le cas du produit dans une algèbre est plus compliqué et sera vu plus loin.

De même, de

$$\forall n \geqslant n_0, \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

on déduit

Proposition : Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ donné, la série $\sum u_n$ converge ssi la série $\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)$, notée $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$, converge et on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$$

Cela permet de définir lorsque la série est convergente la suite des **restes** définie par

Définition : Soit $\sum u_n$ une série convergente, on définit le reste d'ordre n de la série par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

la somme partielle d'ordre n de la série est ... la série elle même autrement dit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S_n + R_n$$

Notamment on a $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

(d) Application du critère de Cauchy, convergence absolue

On se place dans un espace vectoriel normé **complet**.

Reprenons l'idée du début, soit $(\sum u_n)$ une série. Le critère de Cauchy appliqué à la série $\sum u_n$ introduit la quantité

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right\|$$

quantité que l'on peut majorer par $\sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\|$ qui est la différence $S'_{n+p} - S'_n$ pour la série $\sum \|u_n\|$. Cela permet de dire que si la série $\sum \|u_n\|$ converge, (S'_n) est de Cauchy, donc (S_n) aussi et **si** E **est complet**, (S_n) converge. Cela nous conduit à définir

[26]La notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désignera dans une expression algébrique la limite de la série (dont on aura **préalablement** montré la convergence) et dans les autres cas la série elle même (qui peut diverger). C'est pour ce risque de confusion que l'auteur préfère la notation $\sum u_n$ qui ne peut en aucun cas désigner une limite $\in E$.

[27]la réciproque est évidemment fausse

Définition : Une série $\sum u_n$ sera dite absolument convergente si la série $\sum \|u_n\|$ converge.
et à conclure en

Théorème : Dans un espace complet, toute série absolument convergente est convergente. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, on peut écrire de plus

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

Preuve . La preuve du premier est ci-dessus, le deuxième point découle de l'inégalité

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} u_k \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$$

□

Cela constitue l'outil fondamental pour prouver la convergence des séries et de beaucoup de suites (par étude de $\sum (x_{n+1} - x_n)$)

(e) Produit dans une algèbre

La question est de savoir si le produit de deux séries convergentes converge vers le produit des deux limites. La réponse est en général non ([28]). On peut montrer ([29]) que si l'une des deux séries converge absolument, le résultat est vrai. Dans la pratique, on se contente du produit de deux séries absolument convergentes :

Théorème : Soit A une algèbre de Banach (i.e normée complète), $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes, alors si $\sum c_n$ est le produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$, $(c_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k . b_{n-k}\right)$, la série $\sum c_n$ est absolument convergente et converge vers $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) . \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

Preuve . Il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall x, y \in A, \|xy\| \leqslant K. \|x\| . \|y\|$$

On a $\|c_n\| \leqslant K. \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| . \|b_{n-k}\|$ d'où

$$\sum_{n=0}^{N} \|c_n\| \leqslant K. \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| . \|b_{n-k}\| \leqslant K. \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \|a_i\| . \|b_j\| \leqslant K. \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\|\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|b_n\|\right)$$

La série $\sum c_n$ est donc absolument convergente. On a de plus

$$\sum_{n=0}^{2N} c_n - \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) = \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{k=0}^{n} a_k . b_{n-k} + \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} . b_k$$

d'où

$$\left\| \sum_{n=0}^{2N} c_n - \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) \right\| \leqslant K. \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| . \|b_{n-k}\| + \|a_{n-k}\| . \|b_k\|$$

soit

$$\left\| \sum_{n=0}^{2N} c_n - \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) \right\| \leqslant K. \sum_{l=N+1}^{2N} \sum_{k=0}^{N} \|a_k\| . \|b_l\| + \|a_l\| . \|b_k\|$$

[28] mais c'est compliqué
[29] c'est encore compliqué

soit en rajoutant $K.\sum_{l=N+1}^{2N}\sum_{k=N+1}^{2N}\|a_k\|.\|b_l\|$ qui est positif,

$$\left\|\sum_{n=0}^{2N}c_n-\left(\sum_{n=0}^{N}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N}b_n\right)\right\|\leqslant K.\left(\sum_{l=0}^{2N}\sum_{k=0}^{2N}\|a_k\|.\|b_l\|-\sum_{l=0}^{N}\sum_{k=0}^{N}\|a_k\|.\|b_l\|\right)$$

soit enfin

$$\left\|\sum_{n=0}^{2N}c_n-\left(\sum_{n=0}^{N}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N}b_n\right)\right\|\leqslant K.\left(\left(\sum_{k=0}^{2N}\|a_k\|\right).\left(\sum_{l=0}^{2N}\|b_l\|\right)-\left(\sum_{k=0}^{N}\|a_k\|\right).\left(\sum_{l=0}^{N}\|b_l\|\right)\right)$$

et donc

$$\lim_{N\to+\infty}\left\|\sum_{n=0}^{2N}c_n-\left(\sum_{n=0}^{N}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N}b_n\right)\right\|=0$$

d'où le résultat. □

2. Séries à termes positifs

Dans le paragraphe précédent, on a vu que l'étude des séries dans un espace complet se ramène à l'étude de la série $\sum\|u_n\|$ qui est une série à termes réels positifs d'où l'importance de ces séries.

(a) Principe de comparaison

Soit $(u_n)\in[0,+\infty(^{\mathbf{N}}$, la suite $\sum_{k=0}^{n}u_k$ est une suite croissante qui convergera ssi elle est majorée. On peut donc énoncer

Proposition : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, $\sum u_n$ converge ssi les sommes partielles sont majorées indépendamment des bornes de sommation.

Remarque : Si $\sum u_n$ diverge, alors $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}u_k=+\infty$

Exemple 15. *Considérons pour $\alpha>0$ la suite $u_n=\dfrac{-1}{n^\alpha}$. Cette suite tend vers 0 et est croissante. On a*

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}=(-1).\frac{-\alpha}{c^{\alpha+1}}\text{ pour un }c\in[n,n+1]$$

([30]) On en déduit

$$u_{n+1}-u_n\geqslant\frac{\alpha}{(n+1)^{\alpha+1}}$$

et donc

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{\alpha+1}}\leqslant\frac{1}{\alpha}.\sum_{k=2}^{n}u_k-u_{k-1}$$

soit enfin

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha+1}}\leqslant1+\frac{1}{\alpha}.\left(\frac{-1}{n^\alpha}+1\right)\leqslant\frac{1+\alpha}{\alpha}$$

On en déduit $\sum\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ convergente puisque les sommes partielles sont majorées indépendamment des bornes de sommation par $\dfrac{\alpha+1}{\alpha}$. On a même $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\leqslant\frac{\alpha+1}{\alpha}$

[30]théorème des accroissements finis, voir la Terminale et le chapitre sur les dérivées.

Cet exemple est typique dans la mesure où la majoration a été obtenue en majorant le terme de la série (ici $\frac{1}{n^\alpha}$) par le terme d'une série à termes positifs que l'on sait convergente (ici $\sum \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$). Ce mécanisme est très général et s'énonce comme suit :

Proposition : Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, on suppose que $\forall n \geqslant 0, u_n \leqslant v_n$ alors

$$\sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

accessoirement, dans ce cas on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Il est très important de noter que ce sont les termes des séries que l'on compare, **PAS** les sommes partielles des séries.

Preuve . On a immédiatement

$$\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum_{l=0}^{+\infty} v_l$$

et le résultat. □

(b) Application. Etude de $\sum u_n$ avec $u_n = O(v_n)$ puis $v_n = O(u_n)$

En général, les comparaisons entre les termes de séries se font à l'aide des relation de comparaison $o, O, \sim$. Comme la convergence de $\sum u_n$ équivaut à celle de $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et que

$$u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbf{N}, \exists K \geqslant 0, \forall n \geqslant n_0, |u_n| \leqslant K.|v_n|$$

on obtient la proposition suivante :

Proposition : Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries **à termes positifs** telles que $u_n = O(v_n)$ alors on a

$$\sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

Il faut avoir maintenant quelques séries de référence : On cite

i. Série de Cauchy : $u_n = a^n$ avec $a \geqslant 0$. On obtient

Proposition : $\sum a^n$ converge ssi $a \in [0, 1[$

Preuve . $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ convergeant ssi $a \in [0, 1[$, la limite est dans ce cas $\frac{1}{1 - a}$. □

Ces séries sont à la base de critère de D'Alembert.

ii. Série de Riemann : $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$

Proposition : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Preuve . On a vu que cela était vrai pour $\alpha > 1$, comme si $\alpha \leqslant 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n}$, il suffit de montrer que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Or on a pour $n \geqslant 1$

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{n+c} \text{ pour un } c \in [0, 1]$$

d'où

$$\ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n} \text{ soit } \ln \frac{n+1}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Or de

$$\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} = \ln(n+1) \to +\infty$$

on déduit $\sum \ln \frac{n+1}{n}$ divergente et donc $\sum \frac{1}{n}$ divergente. $\square$

iii. Série de Bertrand : $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha . \ln^\beta n}$ avec $\alpha \geqslant 0, \beta \in \mathbf{R}$

Proposition : $\sum \dfrac{1}{n^\alpha . \ln^\beta n}$ converge ssi $\begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou } \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

Preuve . Etudions les différents cas suivant α. On pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha . \ln^\beta n}$

- $\alpha > 1$, on a

$$n^{\frac{\alpha+1}{2}} . u_n = \frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{2}} . \ln^\beta n} \to 0$$

donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$ or $\frac{\alpha+1}{2} > 1$ donc $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ converge et $\sum u_n$ aussi.

- $\alpha < 1$, on obtient de même

$$n^{\frac{\alpha+1}{2}} . u_n = \frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{2}} . \ln^\beta n} \to +\infty$$

et $\dfrac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}} = o(u_n)$. De $\frac{\alpha+1}{2} < 1$ donc $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ diverge et $\sum u_n$ aussi.

- $\alpha = 1$. Si $\beta \leqslant 0$, on a $\frac{1}{n} = O(u_n)$ et donc $\sum u_n$ diverge. Reste le cas $\beta > 0$. Pour le plaisir ([31]), on peut rappeler le principe de condensation dit encore critère de Cauchy :

Lemme : Soit (u_n) une suite positive **décroissante**, alors $\sum u_n$ est de même nature que $\sum 2^n . u_{2^n}$.

Preuve . Celle ci réside dans un regroupement par paquet : Posons

$$v_n = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k$$

on a

$$\frac{1}{2}\left(2^{n+1} . u_{2^{n+1}}\right) \leqslant 2^n . u_{2^{(n+1)}-1} \leqslant v_n \leqslant 2^n . u_{2^n}$$

et donc $\sum v_n$ de même nature que $\sum 2^n . u_{2^n}$. Or on peut écrire si $n \in \left[2^m, 2^{m+1}-1\right]$ pour $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{2^m-1} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{2^m} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} u_k$$

soit

$$\sum_{l=0}^{m-1} v_l \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{l=0}^{m} v_l$$

$\sum v_n$ convergente implique $\sum u_n$ majorée indépendamment des bornes de sommation et donc $\sum u_n$ convergente. De même $\sum u_n$ convergente implique $\sum v_n$ majorée indépendamment des bornes de sommation et donc $\sum v_n$ convergente d'où le résultat. $\square$

[31] il y a des démonstrations plus simples

La suite $\dfrac{1}{n.\ln^{\beta} n}$ pour $\beta > 0$ est positive décroissante donc on peut appliquer le principe de condensation, $\sum u_n$ sera de même nature que $\sum v_n$ avec $v_n = 2^n.u_{2^n}$ soit

$$v_n = 2^n.\frac{1}{2^n.\ln^{\beta}(2^n)} = \frac{1}{\ln^{\beta} 2}.\frac{1}{n^{\beta}}$$

de série convergente ssi $\beta > 1$. On en déduit le résultat. □

(c) Critère de D'Alembert.

Il n'est pas toujours facile de comparer des suites entre elles, l'idée du critère de D'Alembert est de comparer les croissances des suites plutôt que les suites elle même.

Proposition : Soit (u_n) et (v_n) positives jamais nulles à partir d'un certain rang et vérifiant qu'il existe n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

alors $(u_n) = O(v_n)$.

Preuve . Cela découle immédiatement de

$$u_n = u_{n_0}.\prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant u_{n_0}.\prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} \text{ soit } \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}.v_n$$

on a bien $u_n = O(v_n)$. □

En prenant $v_n = a^n$, on peut affirmer que si il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant a$$

alors $u_n = O(a^n)$, lorsque $a < 1$, cela assure la convergence de $\sum u_n$. Inversement, si il existe n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$

alors $(1) = O(u_n)$ et la série $\sum u_n$ diverge, u_n ne convergeant pas vers 0. Un moyen pratique d'obtenir ces égalités est l'étude **lorsqu'elle existe**, de la limite $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. On obtient

Proposition : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs non nuls à partir d'un certain rang, on suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

existe, alors

Si $l < 1$, $\sum u_n$ converge
Si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge
Si $l = 1$, on ne peut rien dire

Preuve . Il suffit de remarquer que si $l < 1$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{l+1}{2} < 1$$

et la série converge d'après ci dessus, et si $l > 1$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{l+1}{2} > 1$$

et la série diverge d'après ci dessus. □

On a trop souvent tendance à limiter ce critère à cette forme, mais le principe de comparer les rapports $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ au lieu des suites est très général. Notamment lorsque $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, il suffit simplement de prendre $\sum v_n$ parmi les séries de Cauchy ou de Bertrand.

3. Série de termes quelconques

(a) Généralités

Dans un K espace vectoriel normé E, l'étude des séries se fera systématiquement à l'aide de la convergence absolue. L'étude d'une série non absolument convergente mais convergente est très complexe, on se limitera à quelques cas particuliers.

Un exemple de série classique est la série exponentielle dans une algèbre normée complète. Soit $(A, \|\ \|)$ une algèbre normée, on a donc

$$\exists K>0, \|xy\| \leqslant K.\|x\|\,\|y\|$$

Proposition : Pour tout $x\in A$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ converge, on note

$$\exp x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Preuve . On a

$$\left\|\frac{x^n}{n!}\right\| \leqslant \frac{1}{n!}.K^{n-1}.\|x\|^n \text{ soit } \frac{1}{K}.\frac{(K.\|x\|)^n}{n!}$$

de série convergente. La série est donc absolument convergente donc convergente. □

On peut noter de plus que

$$\|\exp x\| \leqslant \frac{1}{K}.e^{K.\|x\|}$$

La convergence absolue permet d'obtenir les propriétés usuelles de l'exponentielle notamment

Proposition : Si $x.y=y.x$ alors $\exp(x+y)=\exp x.\exp y$

Preuve . Effectuons le produit de Cauchy des séries $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^n}{n!}$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n$ avec

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}.\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k}=\frac{(x+y)^n}{n!}$$

Le théorème sur le produit des séries absolument convergentes dans une algèbre normée complète donne le résultat. □

(b) Cas des séries alternées, sommation d'Abel

Un exemple de manipulation de séries non absolument convergentes est dans les réels le cas des séries alternées.

Définition : On appelle série alternée une série $\sum u_n$ tel que $(-1)^n.u_n$ soit de signe constant.

Les séries absolument convergentes utilisaient les suites croissantes majorées pour établir leur convergence. Les séries alternées utilisent les suites adjacentes. Cela est illustré par le théorème important ci après :

Théorème : (critère des séries alternées) Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que $|u_n|$ décroît et converge vers 0, alors si $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

→ La série $\sum u_n$ converge
→ Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes
→ $\forall n \geqslant 0, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$

([32])

Preuve . Mettons $(-1)^n .u_n$ positif, on a

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0$$

et de même

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geqslant 0$$

Donc les suites sont monotones de monotonies opposées. De plus $|S_{2n+1} - S_{2n}| = |u_{2n+1}| \to 0$. Les deux suites sont donc adjacentes et convergent vers une même limite S. La suite (S_n) et donc la série $\sum u_n$ convergent donc vers S.
On peut écrire de plus que

$$\forall n \in \mathbf{N}, |S_n - S| \leqslant |S_{n+1} - S_n| \text{ soit } |u_{n+1}|$$

et on obtient bien $\forall n \geqslant 0, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$. □

Exemple 16. *Les séries* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ *convergent dès que* $\alpha > 0$ *et convergent absolument ssi* $\alpha > 1$.

Ce résultat peut être généralisé à l'aide de la transformation d'Abel. La transformation d'Abel est aux séries ce que l'intégration par parties est aux intégrales, on fait les analogies suivantes :

$$\begin{array}{ccc} u(x) & \longleftrightarrow & u_n \\ u'(x) & \longleftrightarrow & u_{n+1} - u_n \text{ ou } u_n - u_{n-1} \\ \displaystyle\int_a^b u & \longleftrightarrow & \sum_{k=a}^{b-1} u_k \text{ ou } \sum_{k=a+1}^{b} u_k \\ [u]_a^b & \longleftrightarrow & u(b) - u(a-1) \text{ ou } u(b+1) - u(a) \end{array}$$

Une "intégration par parties" s'écriera
Lemme : Soit (u_n) et (v_n) deux suites, on pose $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, et par convention $U_{-1} = V_{-1} = 0$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} U_k.v_k = U_n.V_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}.V_k = U_{n+1}.V_n - \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}.V_k$$

Preuve . On a avec la convention $V_{-1} = 0, v_k = V_k - V_{k-1}$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} U_k.v_k = \sum_{k=0}^{n} U_k.(V_k - V_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} U_k.V_k - \sum_{k=0}^{n} U_k.V_{k-1}$$

$$\cdots = \sum_{k=0}^{n} U_k.V_k - \sum_{k=0}^{n-1} U_{k+1}.V_k = \sum_{k=0}^{n-1} (U_k - U_{k+1}).V_k + U_nV_n$$

[32] ce point est important car c'est un des rares cas où on a une estimation fine du reste.

$$\cdots = U_n.V_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}.V_k$$

$$\cdots = \sum_{k=0}^{n} \left(U_k - U_{k+1}\right).V_k + U_{n+1}V_n = U_{n+1}.V_n - \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}.V_k$$

□

Dans la pratique, il est fortement conseillé de refaire les calculs (peu compliqués) plutôt que d'être présomptueux en pensant apprendre la formule sans se tromper.

Une application est la généralisation du critère des séries alternées :

Théorème : Soit (u_n) une suite positive décroissante convergente vers 0 et ε_n une suite telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, les sommes$\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k$ soient bornées, alors la série $\sum \varepsilon_n.u_n$ est convergente.

Preuve . Posons $E_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k$ et $E_{-1} = 0$, on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k.u_k = \sum_{k=0}^{n} E_k.u_k - \sum_{k=0}^{n} E_{k-1}.u_k = \sum_{k=0}^{n} E_k.u_k - \sum_{k=0}^{n-1} E_k.u_{k+1}$$

soit

$$\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k.u_k = \sum_{k=0}^{n} E_k.\left(u_k - u_{k+1}\right) + E_n.u_{n+1}$$

Or par hypothèse, $|E_n|$ est bornée par un réel $M \geqslant 0$ donc

$$\left|E_n.\left(u_n - u_{n+1}\right)\right| \leqslant M.\left(u_n - u_{n+1}\right)$$

de série convergente ($\sum_{n=0}^{+\infty} M.\left(u_n - u_{n+1}\right) = M.u_0$) et $\lim_{n\to+\infty} E_n.u_{n+1} = 0$. On en conclut l'existence de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k.u_k$ et l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n.u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n.\left(u_n - u_{n+1}\right)$$

□

Exemple 17. *Les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 0$. En effet $\frac{1}{n^\alpha}$ décroît vers 0 et*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right| \leqslant \frac{\left|1 - e^{i(n+1)}\right|}{\left|1 - e^{i}\right|} \leqslant \frac{2}{\left|1 - e^{i}\right|}$$

(c) Comparaison série intégrale

Il existe deux façon de comparer une série $\sum u_n$ avec une intégrale $\displaystyle\int_a^b f$. Soit on associe u_n avec $\displaystyle\int_n^{n+1} f$ ou $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f$ avec f telle que par exemple $u_n = f(n)$, soit on associe u_n avec $\displaystyle\int_{b_n}^{b_{n+1}} f$ et f quelconque.

i. La première méthode est particulièrement puissante lorsque f est positive décroissante, on peut dans ce cas écrire si $u_n = f(n)$, $\sum u_n$ est à termes positifs et

$$\int_n^{n+1} f \leqslant u_n \leqslant \int_{n-1}^{n} f$$

donc

$$\int_n^{p+1} f \leqslant \sum_{k=n}^{p} u_k \leqslant \int_{n-1}^{p} f$$

On obtient les résultats suivants :

Proposition : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ existe ssi $\sum u_n$ converge.

Preuve . Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ existe, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant u_0 + \int_0^n f \leqslant u_0 + \int_0^{+\infty} f$$

La série est majorée indépendamment des bornes de sommation et converge donc.
Si la série converge, on a puisque $f \geqslant 0$

$$\int_0^x f \leqslant \int_0^{[x]+1} f \leqslant \sum_{k=0}^{[x]} u_k \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

et pour les mêmes raisons, l'intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ existe. □

Proposition : Si $\sum u_n$ existe, alors, en posant $F(x) = -\displaystyle\int_x^{+\infty} f$, F est la primitive de f s'annulant en $+\infty$, on a

$$R_n \in \left[\int_{n+1}^{+\infty} f, \int_n^{+\infty} f\right] \text{ soit } [-F(n+1), -F(n)]$$

On peut remarquer que

$$\left| R_n - \int_{n+1}^{+\infty} f \right| \leqslant \int_n^{n+1} f \leqslant f(n) \text{ soit } u_n$$

et donc que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_k \cong \sum_{k=0}^{p} u_k + \int_{p+1}^{+\infty} f \text{ à } u_p \text{ près}$$

Preuve . Il suffit juste d'écrire que

$$\int_{n+1}^{p+1} f \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} u_k \leqslant \int_n^p f$$

d'où

$$\int_n^{+\infty} f \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \int_n^{+\infty} f$$

les inégalités en découlent. □

Proposition : Si $\sum u_n$ diverge alors si $F(x) = \displaystyle\int_0^x f$, il existe une constante $l \geqslant 0$ telle que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = F(n) + l + o(1)$$

Preuve . Posons $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - F(n)$, on va étudier la série $\sum v_{n+1} - v_n$. Or

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + F(n+1) - F(n) = u_{n+1} - \int_n^{n+1} f \in [-(f(n) - f(n+1)), 0]$$

Donc c'est une série à termes négatifs de terme général minorée par -$(f(n) - f(n+1))$. Or

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) - f(k+1) = f(0) - f(n+1) \leqslant f(0)$$

donc $\sum f(n) - f(n+1)$ et donc $\sum |v_{n+1} - v_n|$ convergent. De plus on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} - v_n \geqslant -\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) - f(n+1) \geqslant f(0) = -u_0$$

Comme $v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k$ puisque $v_0 = u_0$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} v_n \text{ existe et } \lim_{n\to+\infty} v_n \geqslant u_0 - u_0 \geqslant 0$$

Si $l = \lim_{n\to+\infty} v_n$, on a bien $l \geqslant 0$ et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k - F(n) = v_n = l + o(1) \text{ soit } \sum_{k=0}^{n} u_k = F(n) + l + o(1)$$

□

Exemple 18. *L'exemple le plus célèbre est la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, ce qui précède permet d'affirmer l'existence d'une constante $\gamma \geqslant 0$, (appelée gamma d'Euler) telle que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

ii. La deuxième méthode est surtout intéressante pour établir l'aspect sommable d'une fonction sur un intervalle I ([33]), ainsi si $I = [a, b[$, il est souvent intéressant lors de l'étude de $\int_I f$ de regarder la série $\sum \int_{b_n}^{b_{n+1}} f$ avec (b_n) strictement croissante convergente vers b dans $\bar{\mathbf{R}}$. (Exemple : $b_n = n\pi$ lors de l'étude de $\int_0^{+\infty} e^{-t\sin^2 t} dt$)
On a les résultats suivants qu'on ne démontrera pas, cela concernant plutôt le cours d'intégration :
   - Si $f \geqslant 0$, la définition même donne
   $$f \text{ sommable sur } I \Leftrightarrow \sum \int_{b_n}^{b_{n+1}} f \text{ converge}$$
   et, si convergence,
   $$\int_I f = \int_a^{b_0} f + \sum_{n\geqslant 0} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f$$
   - $$\int_I f \text{ converge} \Rightarrow \sum \int_{b_n}^{b_{n+1}} f \text{ converge}$$

[33]une fonction f est dite sommable sur un intervalle I si l'intégrale $\int_I |f|$ est définie (par exemple si $\forall J$ segment inclus dans I, l'intégrale $\int_J |f|$ est majorée indépendamment de J, cf le cours d'intégration, on ne peut pas tout faire)

- $f \geqslant 0$ et
$$\sum \int_{b_n}^{b_{n+1}} f \text{ converge} \Rightarrow \int_I f \text{ converge}$$

Mais l'exemple $f(x) = \cos x,\ b_n = n\pi$ donne
$$\int_0^{+\infty} \cos t dt \text{ divergente et } \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \cos t dt = 0 \text{ de série convergente}$$
montre que la convergence de $\sum \int_{b_n}^{b_{n+1}} f$ n'implique pas toujours la convergence de $\int_I f$.

2. Topologie, application à $\mathbf{R}$

2.1. Généralités sur les limites de fonctions et la continuité de fonctions de $E \to F$.

1. Applications continues

   E et F sont deux K espaces vectoriels normés, leur norme sera désignée par $\| \|$. f est une application de $D_f \subset E$ vers F. D_f est le domaine de f.

   (a) Limites de fonctions en un point suivant une partie $A \subset E$

   La notion de limite d'une fonction en un point est une notion topologique, autrement dit qui peut se définir uniquement à l'aide de voisinages, d'ouverts et de fermés :

   Définition : Soit $a \in \overline{D_f \cap A}$, $l \in F$, on dit que f admet l comme limite en a ssi

   $$\forall W \in \mathcal{V}(l), \exists V \in \mathcal{V}(a) \text{ tel que } f_d(V \cap D_f \cap A) \subset W$$

   On écrit $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l$.

   Dans la pratique, on utilise l'une des caractérisations suivantes :

Proposition : On a les équivalences suivantes :

$\bullet \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l$
$\bullet \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f \cap A, \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon$
$\bullet \forall (x_n) \in (D_f \cap A)^{\mathbf{N}}, \lim_{n \to +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$

Preuve . La première équivalence résulte directement de la définition des voisinages. Supposons $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l$ et soit (x_n) une suite de $D_f \cap A$ convergeant vers a. Soit W un voisinage de l. il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f_d(V \cap D_f \cap A) \subset W$. (x_n) converge vers a donc il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, x_n \in V$. On a $\forall n \geqslant n_0, x_n \in V \cap D_f \cap A$ et donc $f(x_n) \in W$. On a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

Réciproquement, si l n'est pas limite de f en a suivant A, cela s'écrit

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in D_f \cap A, \|x - a\| < \alpha \text{ et } \|f(x) - l\| \geqslant \varepsilon_0$$

Prenons pour $n \in \mathbf{N}, \alpha = \dfrac{1}{n+1}$, soit x_n un tel x, x_n vérifie $\|x_n - a\| < \dfrac{1}{n+1}$ et $\|f(x_n) - l\| \geqslant \varepsilon_0$. (x_n) est une suite de $D_f \cap A$ convergeant vers a telle que $(f(x_n))$ ne converge pas vers l. □

Remarque : La négation de $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l$ se traduit par l'existence d'un $\varepsilon_0 > 0$ et d'une suite (x_n) de $D_f \cap A$ convergeant vers a telle que $\forall n \in \mathbf{N}, \|f(x_n) - l\| \geqslant \varepsilon_0$.

La caractérisation de la limite en a la plus utile est celle par les suites, très intuitive, elle permet en outre de déduire immédiatement l'unicité de la limite en a ainsi que les propriétés d'arithmétique et de composition des limites.

Proposition : La limite de f en a, si elle existe, est unique. Notamment, si $a \in D_f \cap A$, la limite en a, si elle existe, ne peut être que $f(a)$.

Preuve . Unicité de la limite de la suite $(f(x_n))$ où (x_n) suite de $D_f \cap A$ convergeant vers a (cette suite existe puisque $a \in \overline{(D_f \cap A)}$). Si $a \in D_f \cap A$, la suite constante $x_n = a$ montre que si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, alors c'est la limite de la suite constante $(f(a))$ soit $f(a)$ □

Remarque : Si $a \in D_f \cap A$, la valeur d'une limite éventuelle n'a donc aucun intérêt, seule compte son existence (continuité). C'est pour cette raison que, lorsque $a \in D_f$, lorsqu'on parle de limite, on utilise une notion de limite par valeur différente, celle ci consiste à prendre A tel que $a \notin A$.

Exemple 19. *Lorsque $E = \mathbf{R}$, on retrouve les notions de limites usuelles en a en prenant $A = \mathbf{R} \setminus \{a\}$ (limite simple notée $\lim_{x \to a}$), $A =]a, +\infty($ (limite à droite notée $\lim_{x \to a^+}$ ou $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}}$) et $A =)-\infty, a[$ (limite à gauche notée $\lim_{x \to a^-}$ ou $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}}$).*

La caractérisation des limites par les suites permet d'obtenir les théorèmes d'arithmétique des limites :

Théorème : Si f, g sont deux applications de $D \subset E$ vers F admettant des limites l, l' en $a \in \overline{(D \cap A)}$, si $\lambda, \mu \in K$, alors $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda . l + \mu . l'$

puis

Théorème : (composition des limites) Si f est une application de $D \subset E$ vers F et g une application de $D' \subset F$ vers G telles que $f_d(D) \subset D'$, si $a \in \overline{(D \cap A)}, b \in \bar{D}'$ et si $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$, $\lim_{y \to b} g(y) = l$, alors $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g \circ f(x) = l$.

Preuve . Soit $(x_n) \in (D \cap A)^{\mathbf{N}}$ convergeant vers a. La suite $(f(x_n))$ converge vers $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$, la suite $(g(f(x_n)))$ converge donc vers $\lim_{y \to b} g(y) = l$. On en déduit bien $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = l$. □

Une conséquence importante est bien sûr que, en dimension finie, étudier une limite d'une fonction f en a équivaut à étudier les limites des coordonnées de f en a.

On peut également y rajouter la proposition suivante, utile dans le cas de $E = \mathbf{R}$ lorsqu'on veut étudier une limite en la décomposant en limite à droite et limite à gauche :

Proposition : Soit A et $A' \subset E, a$ adhérent à $D \cap A$ et $D \cap A'$, alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \cup A'}} f(x) \text{ existe } \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \text{ et } \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A'}} f(x) \text{ existent et sont égales}$$

de plus dans ce cas $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \cup A'}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A'}} f(x)$

Preuve . Si $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \cup A'}} f(x)$ existe, toute suite de $(D \cap A)^N$ convergeant vers A est une suite de $(D \cap (A \cup A'))^N$ convergeant vers a, donc sont image converge vers $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \cup A'}} f(x)$, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \text{ existe et vaut } \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \cup A'}} f(x)$$

Supposons que $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A'}} f(x)$ existent et sont égales à l. Soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in D \cap A, \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon$$

$$\exists \alpha' > 0, \forall x \in D \cap A', \|x - a\| < \alpha' \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon$$

On a

$$\forall x \in D \cap (A \cup A'), \|x - a\| < \min \alpha, \alpha' \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon$$

et $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \cup A'}} f(x)$ existent et vaut l. □

(b) Fonctions continues

La continuité correspond en fait à la notion de limite lorsque $a \in D \cap A$. On a vu que seule son existence avait un intérêt dans ce cas, si elle existe, elle ne peut valoir que $f(a)$.

Définition : Soit f de $D \subset E$ vers F, f sera dite continue en $a \in D$ ssi la limite de f en a existe.

On a pris dans cette définition $A = E$, il est rare de parler de continuité suivant une partie A, le seul cas où on fait ainsi est le cas $E = R$ où on parle de continuité à droite en a ($A = [a, +\infty($ ou à gauche ($A =)-\infty, a]$). On supposera dans la suite $A = E$ mais toutes les propriétés se généralisent à ces cas.

Les définitions équivalentes des limites permettent de donner là aussi plusieurs définitions équivalentes :

Proposition : On a les équivalences suivantes :

- f continue en a
- $\forall W \in \mathcal{V}(f(a)), \exists V \in \mathcal{V}(a), f_d(V \cap D) \subset W$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

Et surtout, la caractérisation des limites par les suites a également son équivalent, particulièrement utile, pour la continuité : :

Théorème : f est continue en a ssi pour toute suite (x_n) de D convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

L'arithmétique des limites ainsi que le théorème de composition des limites permettent d'énoncer les résultats suivants sur les opérations de fonctions continues en un point a.

Théorème : Si f, g sont deux fonctions de $D \subset E$ vers F continues en $a \in D$ et si $\lambda, \mu \in K$, alors $\lambda f + \mu g$ est continue en a.

et

Théorème : Si f de $D \subset E$ vers F est continue en a et si g de $D' \subset F$ vers G est continue en $b = f(a)$ avec $f_d(D) \subset D'$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Le cas le plus courant est celui des fonctions continues en chacun des points de leur domaine de définition.

Définition : Soit f de $D \subset E$ vers F, f sera dite continue sur D ssi f est continue en chaque point de D.On écrira $f \in \mathcal{C}_0(D)$

Exemple 20. *Soit $A \subset E$, L'application $x \to d(x, A)$ est continue sur E.*

Là encore, on peut trouver une caractérisation topologique de cette propriété :

Théorème : Soit f une application de $D \subset E$ vers F, on a les équivalences suivantes :

- f continue sur D
- L'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de D
- L'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de D

Preuve . Si $X \subset F$, on a $f_r^{-1}(F \backslash X) = D \backslash f_r^{-1}(X)$, les deuxième et troisième points sont donc équivalents.

Considérons $f \in \mathcal{C}_0(D)$ et $X \subset F$ un fermé de F. Soit (x_n) une suite de $f_r^{-1}(X)$ convergente vers $a \in D$. Il s'agit de prouver $f(a) \in X$. Or la continuité de f en a permet d'affirmer que $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$, $(f(x_n))$ est une suite de X qui est un fermé donc sa limite $f(a)$ appartient bien à X et $a \in f_r^{-1}(X)$.

Réciproquement, si l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de D, l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de D, soit $a \in D$ et $\varepsilon > 0$. $X = B(f(a), \varepsilon)$ est un ouvert de F, $f_r^{-1}(X)$ est un ouvert de D contenant a donc un voisinage de a. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $B(a, \alpha) \cap D \subset f_r^{-1}(X)$. On a bien

$$\forall x \in D, \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

et f continue en a. $\square$

Ce théorème est surtout utile pour prouver que des sous ensembles de E sont des ouverts ou des fermés :

Exemple 21. *Ainsi, classiquement*

- $B(a,r) = f_r^{-1}\left(\left]-\infty, r\right[\right)$ *par* $f : \left\{ \begin{array}{c} E \to \mathbf{R} \\ x \to \|x-a\| \end{array} \right.$ *est un ouvert de* E.
- *Dans* $E = M(n,\mathbf{R})$ *, l'ensemble des matrices orthogonales* $O(n,\mathbf{R})$ *est fermé puisque image réciproque du singleton (et donc fermé)* $\{I_n\}$ *par* $f : \left\{ \begin{array}{c} M(n,\mathbf{R}) \to M(n,\mathbf{R}) \\ A \to A.^tA \end{array} \right.$
- *Pour* $A \subset E$ *non vide et* $\varepsilon > 0$, $A_\varepsilon = \{x \in E, d(x,A) \leqslant \varepsilon\}$ *est fermé comme image réciproque de* $[0,\varepsilon]$ *par* $x \to d(x,A)$ *continue. On retrouve* $\bar{A}$ *fermé puisque* $\bar{A} = \cap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon$ *fermé puisqu'intersection de fermés.*

Le théorème fondamental des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ qui dit que l'image d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné a son (presque) équivalent :

Théorème : Soit f continue de $D \subset E$ vers F et $C \subset D$ un compact, alors $f_d(C)$ est un compact de F.

Preuve . Soit (y_n) une suite de $f_d(C)$, il existe $(x_n) \in C^{\mathbf{N}}$ telle que $\forall n \geqslant 0, f(x_n) = y_n$. C est compact donc (x_n) admet une sous suite $\left(x_{\alpha(n)}\right)$ convergente vers $\lambda \in C$. f est continue en λ donc la sous suite $\left(y_{\alpha(n)}\right) = \left(f\left(x_{\alpha(n)}\right)\right)$ converge vers $f(\lambda) \in f_d(C)$. $f_d(C)$ est donc bien un compact □

L'intérêt de ce théorème est énorme, entre autres les compacts de $\mathbf{R}$ étant les fermés bornés, on en déduit le corollaire suivant :

Conséquence : Soit f continue de $D \subset E$ vers $\mathbf{R}$ et $C \subset D$ un compact, alors f est bornée et atteint ses bornes sur C.

Exemple 22. *Si* C *est un compact non vide de* E *et* $A \subset E$ *non vide, la continuité de* $x \to d(x,A)$ *sur* E *permet d'affirmer l'existence de* $x_0 \in C$ *tel que* $d(x_0, C) = d(C,A)$

(c) Prolongement par continuité

Le problème du prolongement est le suivant : Soit f une fonction définie sur un domaine $D \subset E$, continue sur D, soit D' inclus dans $\bar{D}$ et tel que

$$\forall a \in D',\ \lim_{x \to a} f(x)$$

existe. Peut-on, en écrivant pour $y \in D'$

$$\bar{f}(y) = \lim_{x \to y} f(x)$$

prolonger f en une fonction continue sur D'. Prolongement signifiant bien sûr que $\bar{f}_{/D} = f$.

Le cas courant est celui où $D' = D \cup \{a\}$. La réponse est immédiatement oui.

Proposition : $\bar{f}$ définie par

$$\bar{f}(x) = \left\{ \begin{array}{l} f(x) \ \text{ si } x \neq a \\ \lim_{x \to a} f(x) \end{array} \right.$$

est continue sur $D \cup \{a\}$.

Preuve . Il suffit de constater que, si $x \in D$, $\exists \alpha > 0$ tel que $\bar{f}_{]x-\alpha, x+\alpha[\cap D} = f$ ($\alpha = \frac{|x-a|}{2}$ par exemple), et si $x = a$

$$\bar{f}(a) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \bar{f}(x)$$

et donc $\bar{f}$ continue en a. □

Mais le cas général, plus compliqué, est également vrai :

Proposition : Si on pose pour $y \in D'$

$$\bar{f}(y) = \lim_{x \to y} f(x)$$

alors $\bar{f}$ ainsi définie est continue sur D' et prolonge f.

Preuve . La continuité de f assure que si $y \in D$,

$$\bar{f}(y) = \lim_{x \to y} f(x) = f(y)$$

et $\bar{f}$ prolonge bien f. Montrons $\bar{f}$ continue. Soit $y \in D'$ et $(y_n) \in D'^{\mathbf{N}}$ convergeant vers y. Pour n donné, en a

$$\bar{f}(y_n) = \lim_{x \to y_n} f(x)$$

donc il existe $x_n \in D$ tel que $\left\| f(x_n) - \bar{f}(y_n) \right\| < \frac{1}{2^n}$ **et** $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{2^n}$. La suite (x_n) ainsi définie converge vers y puisque

$$\|x_n - y\| \leqslant \|x_n - y_n\| + \|y_n - y\| \to 0$$

donc $(f(x_n))$ converge vers $\bar{f}(y)$. Or, de $\left\| f(x_n) - \bar{f}(y_n) \right\| < \frac{1}{2^n}$, on déduit que

$$\left\| \bar{f}(y_n) - \bar{f}(y) \right\| \leqslant \left\| f(x_n) - \bar{f}(y_n) \right\| + \left\| f(x_n) - \bar{f}(y) \right\| \to 0$$

soit $\left(\bar{f}(y_n)\right)$ convergente vers $\bar{f}(y)$. $\bar{f}$ est donc continue en y et $\bar{f} \in C_0(D')$. $\square$

(d) Homéomorphismes

Définition : Soit f une application de $A \subset E$ vers F, $A' = f_d(A)$, f sera dit être un homéomorphisme de A vers A' ssi $\begin{cases} f \text{ est bijective} \\ f \text{ continue sur } A \\ f^{-1} \text{ continue sur } A' \end{cases}$

Les homéomorphismes d'un **intervalle** I de $\mathbf{R}$ vers un sous ensemble J de $\mathbf{R}$ sont les applications strictement monotones continues. On a alors J intervalle de $\mathbf{R}$.

Exemple 23. *(important) Les translations t_a et les homothéties de rapport $\lambda \neq 0$ sont des homéomorphismes de E vers E.*

Deux ensembles homéomorphes ont des topologies identiques. Ainsi, dans $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ est homéomorphe à tout intervalle ouvert (borné ou non), $\mathbf{N}$ est homéomorphe à tout sous ensemble de $\mathbf{R}$ sans point d'accumulation ([34]), etc.

(e) Continuité uniforme

Définition : Soit f de $D \subset E$ vers F, f sera dite uniformément continue sur D ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in D, \|x - y\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

Remarque : Une application f sera non uniformément continue ssi

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \alpha > 0, \exists x, y \in D, \|x - y\| < \alpha \text{ et } \|f(x) - f(y)\| \geqslant \varepsilon$$

En prenant $\alpha = \frac{1}{n}$, on obtient que f est non uniformément continue ssi il existe deux suites $(x_n), (y_n)$ de D telles que $\begin{cases} \|x_n - y_n\| \text{ convergente vers } 0 \\ \|f(x_n) - f(y_n)\| \text{ non convergente vers } 0 \end{cases}$

Exemple 24. *$E = \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, on prend $x_n = n, y_n = n + \frac{1}{n}$, on a bien*

$$\begin{cases} \|x_n - y_n\| = \frac{1}{n} \to 0 \\ \|f(x_n) - f(y_n)\| = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0 \end{cases}$$

[34] x est dit point d'accumulation de A ssi $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ i.e ssi x est limite d'une suite de points de A *non* stationnaire. Un point de A qui n'est pas d'accumulation est dit isolé.

Définition : Soit f de $D \subset E$ vers F, f sera dite lipschitzienne de rapport $k > 0$ ssi

$$\forall x, y \in D, \|f(x) - f(y)\| \leqslant k.\|x - y\|$$

Exemple 25. *Les translations, les applications $x \to d(x, A)$ sont 1-lipschtziennes, les homothéties sont lipschtziennes.*

Proposition : Toute application lipschitzienne est uniformément continue, toute application uniformément continue est continue.

Preuve . Si f est k lipschitzienne, pour $\varepsilon > 0$, prenons $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k}$, on a bien pour $x, y \in E$ dès que $\|x - y\| < \alpha, \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\| < k.\left(\dfrac{\varepsilon}{k}\right) \leqslant \varepsilon$. La continuité d'une application uniformément continue est claire. □

Théorème : (Heine) : Si f est continue de $C \subset E$ vers F avec C compact alors f est uniformément continue.

Preuve . On a vu que si f non uniformément continue, il existe deux suites $(x_n), (y_n)$ de C et $\varepsilon_0 > 0$ tels que

$$\begin{cases} \|x_n - y_n\| \text{ convergente vers } 0 \\ \forall n \geqslant 0, \|f(x_n) - f(y_n)\| \geqslant \varepsilon_0 > 0 \end{cases}$$

Il existe $\left(x_{\alpha(n)}\right)$ convergente vers $x \in C$, la suite $\left(y_{\alpha(n)}\right)$ admet de même une sous suite $\left(y_{\alpha(\beta(n))}\right)$ convergente vers $y \in C$. Si $\gamma = \alpha \circ \beta$, $\left(x_{\gamma(n)}\right)$ et $\left(y_{\gamma(n)}\right)$ convergent vers x et $y \in C$ ([35]). La convergence de $(\|x_n - y_n\|)$ vers 0 donne $x = y$. Or comme $\forall n \geqslant 0, \|f(x_n) - f(y_n)\| \geqslant \varepsilon_0$, on a également $\|f(x) - f(y)\| \geqslant \varepsilon_0$ et donc $x \neq y$. □

2. Comparaison de fonctions en un point adhérent aux domaines

   (a) Fonctions numériques

   Là encore, le but est de classer des fonctions qui dans la pratique seront des infiniment petits ou des infiniment grands.

   Dans la pratique, si f, g sont deux fonctions à valeurs réelles, on étudie le rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ au voisinage de $a \in \bar{I}$:

$$\text{Si } \frac{f(x)}{g(x)} \begin{cases} \text{est borné, alors } (f(x)) = O(g(x)) \\ \to 0 \text{ quand } x \to a \text{ alors } (f(x)) = o(g(x)) \\ \to 1 \text{ quand } x \to a \text{ alors } (f(x)) \sim (g(x)) \end{cases}$$

   Cependant cela ne peut être une définition générale puisque non valable si $g(x)$ s'annule. Là aussi, l'idée consiste simplement à imposer l'existence d'un rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ même si $g(x)$ s'annule en écrivant $f(x) = \lambda(x).g(x)$ à partir d'un certain rang. On obtient

   Définition : Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions réelles ou complexes. On dira que $\begin{cases} f(x) = O(g(x)) \\ f(x) = o(g(x)) \\ f(x) \sim (g(x)) \end{cases}$ ssi il existe un $\alpha > 0$ et une fonction $\lambda(x)$ tels que

$$\forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[\cap I, f(x) = \lambda(x).g(x) \text{ et } \lambda(x) \begin{cases} \text{est borné} \\ \to 0 \text{ quand } x \to a \\ \to 1 \text{ quand } x \to a \end{cases}$$

[35] L'existence de deux telles sous suites n'est pas immédiate à priori malgré la définition de la compacité, ainsi, si x est valeur d'adhérence de (x_n) et y valeur d'adhérence de (y_n), en général $x + y$ n'est pas valeur d'adhérence de $(x_n + y_n)$

$f(x) = O(g(x))$ se lit $f(x)$ de l'ordre de $g(x)$
$f(x) = o(g(x))$ se lit $f(x)$ négligeable devant $g(x)$
$f(x) \sim (g(x))$ se lit $f(x)$ équivalent à $g(x)$

Remarque : Si $f(x)$ se compare à $g(x)$ alors $\exists\alpha > 0, \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\,, g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$. On a l'équivalence $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ au voisinage de a si $f(x) \sim g(x)$. On note qu'une conséquence directe de cela est

Proposition : $\left\{\begin{array}{l} f(x) = O(0) \\ f(x) = o(0) \\ f(x) \sim 0 \end{array}\right.$ ssi il existe $\alpha > 0$, tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\, f(x) = 0$

([36]) On notera parfois $f(x) \ll g(x)$ en a au lieu de $f(x) = o(g(x))$ en a.

Remarque : Il n'est pas nécessaire de faire apparaître la fonction $\lambda(x)$. On peut soit utiliser le rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ si cela est possible, soit procéder comme suit :

- $f(x) = O(g(x))$en a ssi il existe une constant $K \geqslant 0$ et un $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\,, |f(x)| \leqslant K.|g(x)| \text{ (i.e } \lambda(x) \text{ bornée)}$$

- $f(x) = o(g(x))$ en a ssi $\forall\varepsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\,, |f(x)| \leqslant \varepsilon.|g(x)| \text{ (i.e } \lambda(x) \text{ tend vers 0)}$$

- $f(x) \sim g(x)$ en a ssi $(f(x) - g(x)) = o(g(x))$ en a et on procède comme ci-dessus.

On retrouve les mêmes propriétés que pour les suites :

Proposition : La relation $\sim$ est une relation d'équivalence. De façon générale, on peut écrire le tableau suivant, les comparaisons étant faites au voisinage de a :

et	$f(x) \sim g(x)$	$f(x) = o(g(x))$	$f(x) = O(g(x))$
$g(x) \sim h(x)$	$f(x) \sim h(x)$	$f(x) = o(h(x))$	$f(x) = O(h(x))$
$g(x) = o(h(x))$	$f(x) = o(h(x))$	$f(x) = o(h(x))$	$f(x) = o(h(x))$
$g(x) = O(h(x))$	$f(x) = O(h(x))$	$f(x) = o(h(x))$	$f(x) = O(h(x))$

et

Proposition : Si f est une fonction et si $l \in \mathbf{R}$, $l \neq 0$ (important), alors

$$f(x) \sim \lim_{x \to a} (f(x)) = l$$

puis

Proposition : Soit $g(x)$ une fonction, une combinaison linéaire de fonctionss négligeables devant $g(x)$ en a (resp de même ordre que $g(x)$) est négligeable en a devant $g(x)$ (resp de même ordre que $g(x)$). Si $f(x) \sim g(x)$ en a et $h(x)$ une fonction donnée, alors $f(x).h(x) \sim g(x).h(x)$.

Preuve . Les démonstrations sont identiques à celles faites pour les suites. $\square$

On peut également noter l'équivalence entre $\left\{\begin{array}{l} f(x) \sim g(x) \\ f(x) - g(x) = o(g(x)) \\ f(x) - g(x) = o(f(x)) \end{array}\right.$

(b) Notations de Landau ([37])

De même que pour les suites, ces notations consistent à écrire $f(x) = g(x) + o(g(x))$ lorsque $(f(x) - g(x)) = o(g(x))$ et $f(x) = h(x) + O(g(x))$ lorsque $(f(x) - h(x)) =$

[36] C'est pour cela qu'on ne compare **jamais** une fonction à la fonction nulle.

[37] Dans ce paragraphe, pour ne pas alourdir les notations, on omettra de préciser que toutes les comparaisons se font au voisinage d'un $a \in \bar{I}$

$O(g(x))$, en clair, on remplace une fonction (ici, $f(x) - g(x)$) que l'on sait négligeable par $o(g(x))$ dans une expression contenant $f(x)$. Il peut y avoir plusieurs o.
Comme pour les suites, les o et les O se manipulent comme des fonctions, ils ne se devinent pas, ils se calculent avec les règles arithmétiques usuelles ainsi que celles énoncés ci-dessus. On ne conserve que la partie significative lors des développements. Là encore, lapplication principale est la notion de développement limité.
Définition : On appelle échelle de comparaison la donnée d'une famille de fonctions non nulles au voisinnages de a ([38]) indexée sur un ensemble totalement ordonné I (en général $\mathbf{N}$ mais cela peut être $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{R}$) vérifiant si

$$\mathcal{F} = \left\{ (f_i(x))_{n\in\mathbf{N}} \right\},\ f_i(x) \ll f_j(x) \Leftrightarrow i < j$$

Exemple 26. *Usuellement, on prend*

- $\mathcal{F}_1 = \{(x-a)^p, p \in \mathbf{N}\}$ *ou* $\left\{\frac{1}{x^p}, p \in \mathbf{N}\right\}$ *pour les développements limités en* a *ou en* $+\infty$
- $\mathcal{F}_2 = \left\{ \left(x^\alpha . \ln^\beta x \right) ;\ (\alpha, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$, $\mathbf{R}^2$ *est ordonné par l'ordre lexicographique, cela donne les développements asymptotiques au voisinage de* 0 *ou* $+\infty$

Comme pour les suites, on peut définir la notion de développement suivant une échelle
Définition : On appelle développement à p termes d'une fonction $f(x)$ en a suivant une échelle $\mathcal{F} = \{f_i(x), i \in I\}$ l'écriture

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} a_k . f_{i_k}(x) + \begin{cases} o\left(f_{i_p}(x)\right) & \text{développement faible} \\ O\left(f_{i_{p+1}}(x)\right) & \text{développement fort} \end{cases}$$

avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ (resp $< i_{p+1}$), les a_k étant des réels (ou complexes) non nuls. $\sum_{k=1}^{p} a_k . f_{i_k}(x)$ est appelé partie principale du développement.
Remarque : Là aussi, dans la pratique, il n'est pas facile de prévoir le nombre p de termes d'un développement, dans ce cas, on fixe à priori la "précision" en se donnant le terme $\begin{cases} o\left(f_{i_p}(x)\right) & \text{pour un développement faible} \\ O\left(f_{i_p}(x)\right) & \text{pour un développement fort} \end{cases}$

Proposition : Le développement à p termes d'une fonction $f(x)$ sur une échelle $\mathcal{F}$ est unique (au terme $O\left(f_{i_{p+1}}(x)\right)$ près dans le cas d'un développement fort).

Preuve . Montrons le même lemme préliminaire que pour les suites
Lemme : Si $f(x)$ vérifie $f(x) = o(f(x))$ alors $f(x)$ nulle au voisinage de a.
En effet, au voisinage de a, $f(x) = \varepsilon(x) . f(x)$ avec $\varepsilon(x)$ convergeant vers 0. Donc il existe un $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \left]a-\alpha, a+\alpha\right[, |\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

On peut écrire

$$\forall x \in \left]a-\alpha, a+\alpha\right[, |f(x)| \leqslant \frac{|f(x)|}{2} \text{ et donc } f(x) = 0$$

Considérons maintenant

$$\mathcal{P}(p) \equiv \begin{pmatrix} \text{Si } \sum_{k=1}^{p} a_k . f_{i_k}(x) + o\left(f_{i_p}(x)\right) = \sum_{k=1}^{p} a'_k . f_{i_k}(x) + o\left(f_{i_p}(x)\right) \\ \text{alors } a_k = a'_k \text{ et } i_k = i'_k \text{ pour } k = 1 \cdots p \end{pmatrix}$$

Montrons $\mathcal{P}(1)$, si $a_1 . f_{i_1}(x) + o(f_{i_1}(x)) = a'_1 . f_{i'_1}(x) + o\left(f_{i'_1}(x)\right)$ alors $a_1 . f_{i_1}(x) \sim a'_1 . f_{i'_1}(x)$. Si $i_1 \neq i'_1$, on aurait mettons $i_1 < i'_1$ et donc $f_{i_1}(x) = o\left(f_{i'_1}(x)\right)$ soit

[38] dans la pratique, $a = 0$ ou $+\infty$

$a_1'.f_{i_1'}(x) \sim a_1.f_{i_1}(x) = o\left(f_{i_1'}(x)\right)$ et $f_{i_1'}(x)$ nulle au voisinage de a ce qui est faux. Donc $i_1 = i_1'$ puis $a_{i_1} = a_1'$.

Supposons $\mathcal{P}(p)$ acquis, et supposons $\sum_{k=1}^{p+1} a_k.f_{i_k}(x) + o\left(f_{i_p}(x)\right) = \sum_{k=1}^{p+1} a_k'.f_{i_k'}(x) + o\left(f_{i_p'}(x)\right)$, comme

$$\sum_{k=2}^{p+1} a_k.f_{i_k}(x) + o\left(f_{i_p}(x)\right) = \sum_{k=2}^{p+1} o\left(f_{i_1}(x)\right) + o\left(f_{i_1}(x)\right) = o\left(f_{i_1}(x)\right)$$

et

$$\sum_{k=2}^{p+1} a_k.f_{i_k'}(x) + o\left(f_{i_p'}(x)\right) = \sum_{k=2}^{p+1} o\left(f_{i_1'}(x)\right) + o\left(f_{i_1'}(x)\right) = o\left(f_{i_1'}(x)\right)$$

On en déduit $a_1.f_{i_1}(x) + o\left(f_{i_1}(x)\right) = a_1'.f_{i_1'}(x) + o\left(f_{i_1'}(x)\right)$ puis $i_1 = i_1'$ et $a_{i_1} = a_1'$ ($\mathcal{P}(1)$). De là, on tire

$$\sum_{k=2}^{p+1} a_k.f_{i_k}(x) + o\left(f_{i_p}(x)\right) = \sum_{k=2}^{p+1} a_k.f_{i_k'}(x) + o\left(f_{i_p'}(x)\right)$$

et, en appliquant $\mathcal{P}(p)$, $a_k = a_k'$ et $i_k = i_k'$ pour $k = 1 \cdots p$ pour $k = 2 \cdots p+1$ puis $\mathcal{P}(p+1)$.

En remarquant qu'un développement fort est un développement faible, on en déduit la proposition. $\square$

Là encore, ce résultat justifie les développements limités et asymptotiques d'une fonction au voisinage d'un point. La théorie est sommaire mais leur utilisation nécessite une habileté technique importante ([39])

(c) Cas des fonctions à valeurs dans E. Comparaison avec une fonction réelle.

Comme pour les suites, le principe consiste en fait à comparer une fonction vectorielle $f(x)$ à une fonction réelle (en général positive) $g(x)$ par l'intermédiaire de sa norme.

Définition : Soit $f(x)$ à valeurs dans E et $g(x)$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, on écriera $\left\{\begin{array}{l} f(x) = O(g(x)) \\ f(x) = o(g(x)) \end{array}\right.$ dès que $\left\{\begin{array}{l} \|f(x)\| = O(g(x)) \\ \|f(x)\| = o(g(x)) \end{array}\right.$ (toujours au voisinage d'un point adhérent aux domaines des deux fonctions). Par abus, si $f(x), g(x)$ sont à valeurs dans E, on pourra écrire $f(x) = o(g(x))$ en lieu et place et $f(x) = o(\|g(x)\|)$

2.2. Cas des applications linéaires.

1. Généralités, caractérisation de la continuité

Théorème : Soit E et F deux K espaces vectoriels, f linéaire de E vers F, on a équivalence entre les propositions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue} \\ \bullet\ f \text{ continue en } \vec{0} \\ \bullet\ f \text{ bornée sur un voisinage de } \vec{0} \\ \bullet\ f \text{ bornée sur } \bar{B} \\ \bullet\ f \text{ Lipschitzienne} \end{array}\right.$$

[39] toujours la même remarque, faire des exercices !

Preuve . De $f(x_n) - f(x) = f(x_n - x)$ et l'équivalence $\lim x_n = x \Leftrightarrow \lim (x_n - x) = \vec{0}$, on déduit l'équivalence entre les deux premiers points

Si f bornée sur un voisinage de $\vec{0}$, il existe $r > 0$ et $M > 0$ telle que $\forall x \in E, \|x\| < r \Rightarrow \|f(x)\| \leqslant M$, on a alors $\forall x \in \bar{B}, \left\|f\left(\frac{r}{2}x\right)\right\| \leqslant M$ et donc f bornée sur $\bar{B}$ par $\dfrac{2M}{r}$. La réciproque est immédiate. Les troisième et quatrième points sont donc équivalents.

Si f bornée sur $\bar{B}$ par M, on a $\forall x \in E$, non nul, $\left\|\dfrac{f(x)}{\|x\|}\right\| \leqslant M$ et donc $\|f(x)\| \leqslant M.\|x\|$, f est lipschitzienne. La réciproque est immédiate. Les quatrième et cinquième points sont donc équivalents.

Si f lipschitzienne, f est continue. Les troisième, quatrième et cinquième points entraînent donc les deux premiers, cela peut se démontrer directement ; supposons f non continue en $\vec{0}$, il existe une suite (x_n) convergeant vers $\vec{0}$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que

$$\forall n \geqslant 0, \|f(x_n)\| \geqslant \varepsilon_0$$

On en déduit entre autres $x_n \neq \vec{0}$, soit $(y_n) = \left(\dfrac{x_n}{\|x_n\|}\right)$, $\|y_n\| = 1$ et donc $(y_n) \in \bar{B}^{\mathbf{N}}$. Or on a

$$\forall n \geqslant 0, \|f(y_n)\| = \left\|f\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{\|x_n\|} \overset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

f est donc non bornée sur $\bar{B}$.

Il reste à montrer que f continue implique f bornée sur $\bar{B}$. Supposons f non bornée,

$$\exists (x_n) \in \bar{B}^{\mathbf{N}}, \lim_{n\to+\infty} \|f(x_n)\| = +\infty$$

Posons $(y_n) = \left(\dfrac{f(x_n)}{\|f(x_n)\|}\right)$, on a

$$\|y_n\| \leqslant \frac{1}{\|f(x_n)\|} \text{ de limite } 0, \lim_{n\to+\infty} y_n = \vec{0}$$

Or

$$\forall n \geqslant 0, \|f(y_n)\| = 1 \text{ non convergeant vers } 0$$

f est non continue en $\vec{0}$. □

Exemple 27. *Les applications linéaires de E normé de dimension finie vers F normé sont continues. En effet, les normes sur E étant équivalente, soit $B_E = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $\| \|_{\infty,E}$ la norme associée. On a pour tout $x \in E$*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k.f(e_k)$$

et donc

$$\|f(x)\|_F \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| . \|f(e_k)\| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \|f(e_k)\|\right) . \|x\|_{\infty,E}$$

et f est bien lipschitzienne donc continue sur E.

Exemple 28. *Prenons $E = \mathbf{R}[X]$ munie de $\left\|\sum_{k=0}^{n} a_k.X^k\right\| = \max(|a_k|, k = 0 \cdots n)$ et les applications $f(P) = P', g(P) = X.P$. On a f non continue car*

$$\forall n \geqslant 1, \|f(X^n)\| = n \to +\infty$$

On a

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \|g(P)\| = \|P\|$$

donc g continue. On peut noter que g est même une isométrie et néanmoins g non bijective.

2. Triple norme, Espace $L_{K,c}(E,F)$

   Les applications linéaires continues forment un **R** ou **C** espace vectoriel. Il ne reste plus qu'à le normer à son tour :

   Définition : $L_{K,c}(E,F) = \{f \in L_K(E,F), f \text{ continue}\}$ et, pour $f \in L_{K,c}(E,F)$, on définit $\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\|$.

Proposition : $\| \ \|$ définit une norme sur $L_{K,c}(E,F)$. On a pour $f \in L_{K,c}(E,F)$,

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\| < 1} \|f(x)\|$$

et

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|f\| \, \|x\|$$

Preuve . On vérifie bien que $\forall f \in L_{K,c}(E,F), \|f\| \geqslant 0$, l'inégalité triangulaire et $\|\lambda f\| = |\lambda| . \|f\|$ découle des propriétés de la norme sur F. Si $\|f\| = 0$, On a $\forall x \in E, \left\|\frac{x}{\|x\|+1}\right\| < 1$ donc si $\|f\| = 0$, on a

$$f\left(\frac{x}{\|x\|+1}\right) = \vec{0} \text{ et donc } f(x) = \vec{0}$$

$\| \ \|$ est donc bien une norme sur $L_{K,c}(E,F)$.

Montrons le deuxième résultat. On a $\sup_{\|x\|<1} \|f(x)\| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\|$. De plus, soit $\varepsilon > 0$, on a pour $x \in E$ avec $\|x\| \leqslant 1$

$$\left\|\frac{x}{1+\varepsilon}\right\| < 1 \text{ et donc } \left\|f\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)\right\| \leqslant \sup_{\|x\|<1} \|f(x)\|$$

soit $\|f(x)\| \leqslant (1+\varepsilon) . \sup_{\|x\|<1} \|f(x)\|$ .D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\| \leqslant (1+\varepsilon) . \sup_{\|x\|<1} \|f(x)\|$$

et l'égalité. Soit alors $x \in E$, non nul. On a $\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\|$ et le résultat. □

Proposition : On a

$$\forall f, g \in L_{K,c}(E,F), \forall \lambda, \mu \in K, \|\lambda f + \mu g\| \leqslant |\lambda| \, \|f\| + |\mu| \, \|g\|$$

et

$$\forall f \in L_{K,c}(E,F), \forall g \in L_{K,c}(F,G), g \circ f \in L_{K,c}(E,G) \text{ et } \|g \circ f\| \leqslant \|g\| . \|f\|$$

De plus, la complétude de F entraîne la complétude de $L_{K,c}(E,F)$.

Théorème : Si F est de Banach, $L_{K,c}(E,F)$ est de Banach.

Preuve . Soit (f_n) une suite de Cauchy de $L_{K,c}(E,F)$. Considérons $x \in E$, la suite $(f_n(x))$ vérifie

$$\forall n, p \geqslant 1, \|f_n(x) - f_p(x)\| \leqslant \|f_n - f_p\| . \|x\|$$

donc est de Cauchy. F étant de Banach, cette suite converge vers une limite dépendant de x. Notons $f(x)$ cette limite.

f est linéaire, en effet, on a $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in K$,

$$\|f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)\| = \lim_{n \to +\infty} \|f_n(\lambda x + \mu y) - \lambda f_n(x) - \mu f_n(y)\| = 0$$

La suite (f_n) étant de Cauchy, il en est de même de la suite $(\|f_n\|)$ de Cauchy dans $\mathbf{R}$ donc convergente donc bornée. Soit M un majorant de cette suite, on a

$$\forall x \in E, \|f_n(x)\| \leqslant \|f_n\| \|x\| \leqslant M. \|x\|$$

d'où

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \lim_{n \to +\infty} \|f_n(x)\| \leqslant M. \|x\|$$

et f continue. ([40]) □

Tout cela peut s'appliquer aux formes linéaires. Cela nous donne la définition du dual topologique :

Définition : On appelle dual topologique de E l'espace $L_{K,c}(E, K)$ noté E' espace des formes linéaires continues de E ([41]).

Remarque : Si $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, E' est un Banach d'après le théorème ci-dessus.

Dans la pratique, on retiendra surtout le lien entre les hyperplans fermés et les formes linéaires continues :

Proposition : Soit f une forme linéaire, f est continue ssi l'hyperplan $H = \ker f$ est un fermé de E.

Preuve . Si $f \in E'$, H image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue f est bien un fermé de E. Réciproquement, si f non continue, f non nulle et $H \neq E$, $f(\bar{B})$ non bornée et il existe une suite (y_n) avec

$$\forall n \geqslant 0, \|y_n\| \leqslant 1 \text{ et } \|f(y_n)\| \geqslant n+1$$

Montrons $\bar{H} = E$. Soit $x \in E \backslash H, f(x) \neq 0$. Considérons la suite

$$z_n = x - \left(\frac{f(x)}{f(y_n)}\right) y_n$$

On a $\forall n \geqslant 0, f(z_n) = f(x) - f(x) = 0$ donc $z_n \in H$, or

$$\forall n \geqslant 0, \|z_n - x\| = \left\| \left(\frac{f(x)}{f(y_n)}\right) y_n \right\| \leqslant \left| \frac{f(x)}{f(y_n)} \right| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

D'où $x \in \bar{H}, \bar{H} = E$ et donc H non fermé. □

3. Isomorphismes d'espaces normés

Définition : Soit $f \in L_K(E, F)$, f est un isomorphisme d'espaces normés entre E et F ssi

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est bijective} \\ f \text{ est continue sur } E \\ f^{-1} \text{ est continue sur } F \end{array} \right.$$

Proposition : Soit f linéaire surjective de E vers F, f est un isomorphisme d'espaces normés de E vers F ssi

$$\exists \alpha, \beta > 0 \text{ tels que } \forall x \in E, \alpha. \|x\| \leqslant \|f(x)\| \leqslant \beta. \|x\|$$

[40] La réciproque de ce théorème est vraie lorsque E est non réduit à l'espace $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$

[41] L'intérêt de ce dual est d'être, sous certaines hypothèses, une réplique de E. Intuitivement, un vecteur de E peut se caractériser par son action sur E' (i.e les résultats de $f \to f(x)$ pour $f \in E'$). Cela est à la base de l'analyse fonctionnelle, mais sort du cadre du cours.

Preuve . f est bien injective puisque $f(x) = 0 \Rightarrow \alpha. \|x\| = 0$ soit x nul.f est surjective par hypothèse. f est β-lipschitzienne donc continue. Si $y \in F$, on a

$$\alpha. \left\|f^{-1}(y)\right\| \leqslant \left\|f\left(f^{-1}(y)\right)\right\| \text{ soit } \left\|f^{-1}(y)\right\| \leqslant \frac{1}{\alpha} \|y\|$$

et f^{-1} $\dfrac{1}{\alpha}$-lipschitzienne donc continue. Réciproquement, si f est un isomorphisme d'espaces normés entre E et F, on a

$$\forall x \in E, \alpha. \|x\| \leqslant \|f(x)\| \leqslant \beta. \|x\|$$

dès que $\beta \geqslant \|f\|$ et $\alpha \leqslant \dfrac{1}{\|f^{-1}\|}$. □

Remarque : Dire que $N \sim \| \ \|$ revient donc à dire que Idt est un isomorphisme d'espaces normés entre (E, N) et $(E, \| \ \|)$

Proposition : Si f est un isomorphisme d'espaces normés, alors $\rho(f) = \|f\| . \left\|f^{-1}\right\| \geqslant 1$. Cette quantité est appelé conditionnement de f.

([42])

Preuve . $f \circ f^{-1} = Idt$, de $\|Idt\| = 1$, on déduit le résultat. □

4. Applications multilinéaires continues

   Tout ce qui précède peut se généraliser aux applications multilinéaires (déterminant, produit mixtes, etc)

   $E_1, E_2, \cdots, E_n$ et F sont $n+1$ espaces normés, on note $\| \ \|$ leur norme et $E = .\prod_{i=1}^n E_i$ l'espace produit.

Théorème : Soit f multilinéaire de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ vers F, on a équivalence entre

$$\begin{cases} \bullet\ f \text{ continue sur } E \\ \bullet\ f \text{ continue en } \left(\vec{0}, \cdots, \vec{0}\right) \\ \bullet\ f \text{ bornée sur un voisinage de } \left(\vec{0}, \cdots, \vec{0}\right) \\ \bullet\ f \text{ bornée sur } \bar{B} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in E, \|(x_1, \cdots, x_n)\| \leqslant 1\} \\ \bullet\ \exists k \geqslant 0, \forall (x_1, \cdots, x_n) \in E, \|f(x_1, \cdots, x_n)\| \leqslant k. \|x_1\| \cdots \|x_n\| \end{cases}$$

Preuve . (succinte) La démonstration est identique est à celle du théorème sur les applications linéaires continues. On peut également procéder par récurrence sur n en remarquant que f de $E_1 \times E_2$ vers F est continue ssi

$$\begin{cases} \forall x \in E_1, f(x, .) \in L_{K,c}(E_2, F) \\ \phi : \begin{array}{ccc} E_1 & \to & L_{K,c}(E_2, F) \\ x & \to & f(x, .) \end{array} \text{ est continue} \end{cases}$$

□

On note $L_{K,c}(E_1, E_2, \cdots, E_n; F)$ les applications multilinéaires continues de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ vers F. On a des propriétés similaires au cas $n = 1$, notamment

Définition : Pour f multilinéaire continue de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ vers F, on pose

$$\|f\| = \sup \{\|f(x_1, \cdots, x_n)\|, \|x_1\| \leqslant 1, \cdots, \|x_n\| \leqslant 1\}$$

Théorème : $L_{K,c}(E_1, E_2, \cdots, E_n; F)$ muni de $\| \ \|$ définie ci-dessus est un K-espace vectoriel normé, si F est un Banach, $L_{K,c}(E_1, E_2, \cdots, E_n; F)$ est également un Banach.

[42] Le conditionnement intervient dans la propagation des erreurs lors de la résolution d'un système $f(x) = b$ notamment dans le cas de la dimension finie et du calcul matriciel, entre autres, si A est symétrique $\rho(A) = \dfrac{\max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}}{\min\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}}$.

2.3. Application aux fonctions numériques.

1. Fonctions numériques

   Les fonctions numériques sont les fonctions d'un intervalle de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$. Rappelons le vocabulaire suivant :

   Définition : Monotone : f est monotone si elle est croissante ou décroissante

   Définition : Période : Pour $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, on définit

   $$T_f = \{t \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x+t) = f(x)\}$$

   T_f est un sous groupe de $\mathbf{R}$ qui est de la forme

   → $\{0\}$, f n'est pas périodique
   → $T.\mathbf{Z} = \{k.T, k \in \mathbf{Z}\}$, f est dite T périodique, T est la période de f
   → tel que $\overline{T_f} = \mathbf{R}$, exemple : $f = 1_{\mathbf{Q}}$ vérifie $T_f = \mathbf{Q}$, f ne peut être continue (Exercice, (prendre $(t_n) \in T_f$ con

   Définition : f est paire si $f(-x) = f(x)$, impaire si $f(-x) = -f(x)$, le domaine étant symétrique par rapport à 0

   Rappelons que toute fonction se décompose de façon unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

   $$f(x) = f_p(x) + f_i(x) \text{ avec } \begin{cases} f_p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ f_i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$$

2. Continuité

   Les fonctions numériques continues ont des propriétés spécifiques. La plus importante est le théorème des valeurs intermédiaires (dont la généralisation nécessite la notion de connexe). Les conséquences fondamentales.

   (a) Théorème des valeurs intermédiaires.
   Ce théorème a plusieurs formulations bien entendu équivalentes.

Théorème : Soit $f \in C_0(I)$, alors

$$\forall x, y \in I, [f(x), f(y)] \subset f_d[x, y]$$

soit encore

$$\forall u \in [f(x), f(y)], \exists z \in [x, y], f(z) = u$$

soit encore l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

([43])

Preuve . Si $u = f(x)$ ou $f(y)$, $z = x$ ou y convient. Supposons donc

$$f(x) < u < f(y)$$

et posons $z = \sup A$ avec $A = \{t \in [x, y], f(t) < u\}$.
$A \neq \varnothing$ puisque $x \in A$, et A est majoré par y donc z existe. Il existe une suite $(t_n) \in A^{\mathbf{N}}$ telle que (t_n) converge vers z. De $f(t_n) < u$ on déduit $f(z) \leqslant u$ et, entre autres, $z \neq y$. Posons

$$t'_n = \frac{n.z + y}{n+1} > z$$

[43]Il faut noter que le théorème des valeurs intermédiaires n'a rien à voir avec l'unicité d'une solution à $f(z) = u$. Cette unicité, assurée en général par des hypothèses de monotonie stricte, est un autre problème.

$t'_n \in [z, y] \subset [x; y]$ et $t'_n \notin A$ donc $f(t'_n) \geqslant u$ soit, en passant à la limite $f(z) \geqslant u$ et $f(z) = u$. Le résultat est prouvé. $\square$

Cela ne caractérise pas les fonctions continues, une fonction f définie sur I vérifie les valeurs intermédiaires ssi

$$\forall x, y \in I, \forall u \in [f(x), f(y)], \exists z \in [x, y], f(z) = u$$

Les fonctions continues sur I vérifient les valeurs intermédiaires, mais on retrouve également les dérivées de fonctions dérivables (voir ci-dessous), ou encore la fonction suivante :

$$I = \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

qui n'est ni continue, ni une dérivée.

(b) Fonctions monotones. Caractérisation des homéomorphismes sur un intervalle

Les fonctions monotones, à l'image des suites monotones ont des propriétés remarquables. Notamment

Proposition : Soit f monotone sur I intervalle, alors $\forall a \in \bar{I}$ (y compris éventuellement $\pm\infty$), $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existe. De plus, si f croissante

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \sup f_d\,()-\infty, a[\cap I) = \sup_{x<a} f(x)$$

([44])

Preuve . Supposons f croissante, soit $\varepsilon > 0$, soit $\exists a' < a, f(a') > \sup_{x<a} f(x) - \varepsilon$. On a

$$\forall x \in]a', a[, \sup_{x<a} f(x) - \varepsilon < f(a') \leqslant f(x) \leqslant \sup_{x<a} f(x)$$

et donc $\lim_{x\to a^-} f(x) = \sup_{x<a} f(x) = \sup f_d\,()-\infty, a[\cap I)$. $\square$

Les applications strictement monotones sur un intervalle sont en fait les homéomorphismes sur cet intervalle.

Rappelons qu'un homéomorphisme de $I \to J$ est une bijection continue à réciproque continue. On a donc :

Théorème : Soit $f \in C_0(I)$, f est un homéomorphisme de I intervalle vers $J = f_d(I)$ ssi f strictement monotone.

La preuve se fait en plusieurs étapes en démontrant des lemmes utiles eux même.

Lemme : Soit $f \in C_0(I)$, f injective ssi f est strictement monotone.

Preuve . Il est clair que cela est une condition suffisante. Supposons qu'il existe $a < b$ tels que $f(a) < f(b)$. Soit $x > b$ tel que $f(x) < f(b)$, prenons

$$u = \frac{f(b) + \max(f(a), f(x))}{2}$$

$u \in [f(a), f(b)]$ donc admet un antécédent dans $[a, b]$ distinct de b puisque $u \neq f(b)$.

$u \in [f(b), f(x)]$ donc admet un antécédent dans $[b, x]$ distinct de b puisque $u \neq f(b)$.

u admet donc deux antécédents ce qui contredit f injective. Donc $f(x) > f(b)$. On montre de même que si $x < a$ alors $f(x) < f(a)$ et si

$$x \in]a, b[,\ f(a) < f(x) < f(b)$$

(Finalement, sur trois points, f est monotone : Si $a < b < c$ alors $f(a) < f(b) < f(c)$).

[44] La notion de limite de fonction s'étend au cas $a = \pm\infty$ de la même manière que pour les suites.

Considérons alors $x, y \in I$ avec $x < y$ et gardons le couple $a < b$ avec $f(a) < f(b)$. En considérant a, b et x, on déduit que f est croissante sur ces 3 points, si $x < b$, $f(x) < f(b)$ et si $x > b$ alors $f(x) > f(b)$. En considérant le triplet x, y, et b, comme f est croissante sur le couple (x, b) est est croissante sur le couple x, y soit puisque $x < y$, $f(x) < f(y)$. f est strictement croissante. □

Lemme : Si f monotone sur l'intervalle I et si $f_d(I)$ est un intervalle J, alors f est continue.

Preuve . Soit $a \in I$, pour simplifier, prenons a non borne de I (le cas a borne de I se traite de façon identique). Il existe un $\alpha_0 > 0$ tel que $a - \alpha_0$ et $a + \alpha_0$ appartiennent à I. Soit $\varepsilon > 0$, prenons

$$\varepsilon' = \min \varepsilon, |f(a + \alpha_0) - f(a)|, |f(a) - f(a - \alpha_0)|$$

On a $f(a) \pm \varepsilon' \in f_d[a - \alpha_0, a + \alpha_0]$ du fait des valeurs intermédiaires puisque

$$f(a) \pm \varepsilon' \in [f(a - \alpha_0), f(a + \alpha_0)]$$

Donc il existe a_1, a_2 tels que $f(a_1) = f(a) + \varepsilon'$ et $f(a_2) = f(a) - \varepsilon'$, on a par monotonie de f

$$a \in [a_1, a_2], a \neq a_1, a_2 \text{ et } \forall x \in [a_1, a_2], f(x) \in [f(a) - \varepsilon', f(a) + \varepsilon']$$

Soit si $\alpha'' = \min(|a_1 - a|, |a_2 - a|)$

$$\forall x \in I, |x - a| < \alpha'' \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon' \leqslant \varepsilon$$

et f continue en a.

Plus simplement, si f croissante, une discontinuité en a indique par exemple que $f^+(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) > f(a)$. On a alors

$$\forall x \in I \cap)-\infty, a], f(x) \leqslant f(a) < \frac{f(a) + f^+(a)}{2}$$

et

$$\forall x \in I \cap]a, +\infty(, f(x) \geqslant f^+(a) > \frac{f(a) + f^+(a)}{2}$$

On a donc $\frac{f(a)+f^+(a)}{2} \notin f_d(I)$ or $\frac{f(a)+f^+(a)}{2} \geqslant f(a)$ et pour un $b \in I \cap]a, +\infty($, $\frac{f(a)+f^+(a)}{2} \leqslant f(b)$ donc

$$\frac{f(a) + f^+(a)}{2} \in [f(a), f(b)]$$

, si $f_d(I)$ était un intervalle, on devrait avoir $\frac{f(a)+f^+(a)}{2} \in f_d(I)$. On en déduit une contradiction. f est donc continue. □

On est en mesure de prouver le théorème de caractérisation des homéomorphismes sur un intervalle.

Preuve . Soit $f \in C_0(I)$ et $J = f_d(I)$. J est un intervalle.

Si f continue de I vers $J = f_d(I)$, f injective équivaut à f strictement monotone d'après le lemme ci-dessus. f injective sur I équivaut à f bijective de I vers J. Dans ce cas f^{-1} est strictement monotone de J vers I qui sont deux intervalles. Le lemme précédent montre que f^{-1} est continue. f est donc bien un homéomorphisme. □

(c) Image d'un segment

Prenons un segment dans un intervalle I (éventuellement, ce segment peut être I) et f continue sur I. Ce segment est un intervalle, donc son image par f sera un intervalle. Ce segment est également un fermé borné de $\mathbf{R}$ donc un compact. Son image par f sera donc un compact autrement dit fermé et borné. Ce sera donc un intervalle fermé borné donc un segment. On aboutit au théorème suivant, bien connu des Terminales

Théorème : L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est un segment $[c, d]$.

3. Dérivabilité

Dans ce chapitre on considérera une fonction d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$. La notion de dérivée s'étend bien sûr au cas des fonctions à valeurs dans un espace normé E (souvent $\mathbf{C}$ ou de dimension finie dans la pratique). Mais certaines propriétés sont spécifiques aux fonctions réelles. Cela sera signalé au fur et à mesure.

(a) Taux d'accroissement, dérivée

Définition : Soit f définie sur I, pour $a \in I$, on définit la fonction taux d'accroissement en a par

$$\Delta f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Elle est définit sur $I \setminus \{a\}$.

Le taux d'accroissement a des propriétés arithmétiques simples :

$\rightarrow$ Linéarité : Si f, g sont définies sur I et si $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$,

$$\Delta(\lambda f + \mu g)_a = \lambda.\Delta f_a + \mu.\Delta g_a$$

$\rightarrow$ Compatibilité avec le produit (dans une algèbre) :

$$\Delta f g_a(x) = \Delta f_a(x).g(a) + f(x).\Delta g_a(x)$$

$\rightarrow$ Aspect symétrique : $\Delta f_x(y) = \Delta f_y(x)$

Définition : Soit f définie sur I, f est dit dérivable en a ssi $\lim_{x \to a} \Delta f_a(x)$ existe.

Avec les notations de Landau, cela s'écrit f dérivable en a ssi il existe l tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l + o(1) \text{ soit } f(x) = f(a) + l.(x - a) + o(x - a) \text{ en } a$$

Autrement dit, f est dérivable en a ssi f admet un développement limité à l'ordre 1 en a ([45]). Cela permet entre autre d'affirmer que si f dérivable en a, alors

$$f(x) = f(a) + o(1) \text{ en } a$$

et donc f continue en a.

Proposition : f dérivable en a implique f continue en a

Définition : Une fonction est dite dérivable sur I (ou $D_1(I)$) ssi elle est dérivable en tout point de I.

(b) Propriétés des dérivées

Une dérivée n'est pas forcement continue, ainsi si on prend $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbf{R}$, on a

$$\begin{array}{l} f(x) = o(x) \text{ en } 0 \text{ donc } f'(0) = 0 \\ f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{array}$$

et $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -1 \rightarrow -1 \neq f'(0)$, f' non continue en 0. Mais une dérivée vérifie les valeurs intermédiaires.

Proposition : Soit f dérivable sur I, $x, y \in I$ et $u \in]f'(x), f'(y)[$, il existe $z \in]x, y[$ tel que $f'(z) = u$.

Cette proposition sera démontrée plus tard (cf théorème de Rolle).

La dérivation respect la linéarité, le produit et la composition :

Proposition : Si f, g dérivable en a (resp sur I), si $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, alors $\lambda.f + \mu.g$ dérivable en a (resp sur I).

[45] Cela s'arrête au niveau de l'ordre 1, la fonction $x^3 \sin \frac{1}{x^2}$ admet un développement limité d'ordre 2 en 0 est n'a pas de dérivée seconde en ce point. Certain préfère dire différentiable en a pour l'existence d'un développement limité d'ordre 1 en a, se rapprochant plutôt de la définition de la différentiabilité d'une fonction à plusieurs variables.

Preuve . Cela vient de l'égalité

$$\Delta(\lambda f+\mu g)_a=\lambda.\Delta f_a+\mu.\Delta g_a$$

et des théorèmes d'arithmétique des limites de fonctions. □

Proposition : Si f,g dérivable en a (resp sur I), alors fg dérivable en a (resp sur I).

Preuve . Là encore, la preuve vient de l'égalité

$$\Delta fg_a(x)=\Delta f_a(x).g(a)+f(x).\Delta g_a(x)$$

En passant à la limite en a, à condition d'être dans une algèbre normée ce qui est toujours le cas en dimension finie et notamment bien sûr dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on obtient fg dérivable et

$$(fg)'=f'g+fg'$$

□

(c) Composition

La composition d'applications dérivables est compliquée, en fait nous distinguerons 3 cas.

i. Composition de $f:I\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ avec $g:J\subset\mathbf{R}\to E$.
C'est le théorème de composition des dérivées usuel :

Proposition : Soit $f:I\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ et $g:J\subset\mathbf{R}\to E$ avec $f_d(I)\subset J$, f dérivable en $a\in I$ et g dérivable en $b=f(a)$, alors $g\circ f$ est dérivable en a de dérivée $g'(b).f'(a)=f'(a).(g'\circ f)(a)$

Preuve . Le plus simple est d'utiliser les développements limités en a : On peut écrire

$$f(a+h)=f(a)+f'(a).h+o(h)\ \text{ en } 0$$

et

$$g(b+h')=g(b)+g'(b).h'+o(h')\ \text{ en } 0$$

Avec $h'=f(a+h)-f(a)=f'(a).h+o(h)$, on obtient

$$g(f(a+h))=g(b)+g'(b).f'(a).h+o(h)+o(h)=g(b)+g'(b).f'(a).h+o(h)$$

et le résultat. □

ii. Composée de $f:I\subset\mathbf{R}\to E$ avec $g:E\to F$ linéaire.
Le résultat est simple **lorsque** g **est continue** ce qui est toujours le cas si E de dimension finie (cas courant).

Proposition : Soit $f:I\subset\mathbf{R}\to E$ et $g:E\to F$ linéaire continue, on suppose f dérivable en $a\in I$ (resp sur I), alors $g\circ f$ est dérivable en a (resp sur I) et $(g\circ f)'=g\circ(f')$.

Preuve . Si g est linéaire, alors g est K_lipschitzienne pour un $K>0$, et donc si $\varepsilon(h)=o(h)$ à valeurs dans E, on peut écrire

$$\|g(\varepsilon(h))\|\leqslant K.\|\varepsilon(h)\|$$

soit $g(\varepsilon(h))=O(\varepsilon(h))$ soit un $o(h)$. En résumé, $g(o(h))=o(h)$. On peut donc écrire

$$g\circ f(a+h)=g(f(a)+f'(a).h+o(h))=g\circ f(a)+g(f'(a)).h+o(h)$$

et le résultat en découle. □

iii. Composée de $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ avec $g : J \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ particulière.
L'idée est de pouvoir dériver comme dans $\mathbf{R}$ des fonctions à valeurs complexes construites sur les fractions rationnelles et l'exponentielle (ce qui regroupe la plupart des fonctions usuelles). Le résultat s'obtient de proche en proche, le but étant d'obtenir le résultat suivant :
Si $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ et $g : J \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ avec f dérivable sur I, alors $g \circ f$ dérivable sur I et
$$(g \circ f)' = (g' \circ f) .f'$$
avec g parmi une classe de fonctions.

Proposition : Le résultat est vrai lorsque g est un polynôme.

Preuve . Prenons $g(z) = z^n$ alors $g \circ f(t) = f(t)^n = f(t).f(t) \cdots ; f(t)$ n fois. Le résultat découle de la dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables dans une algèbre normée (récurrence sur n). La linéarité de la dérivation permet d'étendre le résultat aux combinaisons linéaires de monômes i.e aux polynômes. □

Proposition : Le résultat est vrai lorsque g est une fraction rationnelle.

Preuve . Compte tenu de ce qui précède et de la dérivation d'un produit, il suffit de prouver le résultat pour $g(z) = \dfrac{1}{z}$. Or on a
$$\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)} + h.\frac{f'(a)}{f(a)^2} = \frac{f(a).(f(a) - f(a+h)) + h.f'(a)\, f(a+h)}{f(a+h).f(a)^2}$$
soit
$$\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)} + h.\frac{f'(a)}{f(a)^2} = \frac{-hf(a)\, f'(a) + o(h) + h.f'(a)\, f(a) + o(h)}{f(a)^3 + o(1)} = o(h)$$
et donc $\dfrac{1}{f}$ dérivable en a de dérivée
$$-\frac{f'(a)}{f(a)^2} = f'(a).\frac{-1}{(f(a))^2}$$
ce qui prouve le résultat. □

Proposition : Le résultat est vrai pour $g(z) = \exp(z)$

Preuve . Rappelons que, en dimension finie, une fonction a une limite en a ssi ses coordonnées ont une limite en a. Donc une fonction à valeur complexe $f(t) = a(t) + i.b(t)$ avec $a = \operatorname{Re} f$ et $b = \operatorname{im} f$ est dérivable ssi a et b le sont, on a de plus dans ce cas $f'(t) = a'(t) + i.b'(t)$.
Posons donc $f(t) = a(t) + i.b(t)$ dérivable, on a
$$\exp f(t) = \exp(a(t) + i.b(t)) = e^{a(t)}.\cos .b(t) + i.e^{a(t)}.\sin .b(t)$$
donc $\exp \circ f$ dérivable et
$$\begin{gathered}(\exp f)'(t) = a'(t).\left(e^{a(t)}.\cos .b(t) + i.e^{a(t)}.\sin .b(t)\right)\\ \cdots + b'(t).\left(e^{a(t)}.(-\sin).b(t) + i.e^{a(t)}.\cos .b(t)\right)\end{gathered}$$
soit
$$(\exp f)'(t) = (a'(t) + i.b'(t)).\left(e^{a(t)}.\cos .b(t) + i.e^{a(t)}.\sin .b(t)\right) = f'(t).\exp f(t)$$
et le résultat. □
Ces trois propositions permettent de dériver simplement les expressions usuelles.

iv. Difféomorphisme
Soit f un homéomorphisme de I vers J, et $a \in I$. Posons $b = f(a)$, on peut écrire que

$$\Delta f_b^{-1}(y) = \frac{f^{-1}(y) - a}{y - b} = \frac{1}{\Delta f_a\left(f^{-1}(y)\right)}$$

On en déduit que si f dérivable en a, f^{-1} sera dérivable en b ssi $f'(a) \neq 0$. On obtient donc le résultat suivant :

Proposition : Soit f homéomorphisme de I vers J, et $a \in I$, f^{-1} sera dérivable en $b = f(a)$ ssi $f'(a) \neq 0$, de plus

$$f^{-1\prime}(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$$

Cela permettra de caractériser les difféomorphismes, autrement dit les bijections continues dérivables à réciproques continues dérivables. Cela sera détaillé plus loin.

(d) Théorème de Rolle, accroissements finis (spécifique à $\mathbf{R}$)
Une utilisation principale des dérivées est l'étude des fonctions numériques. Tout cela repose sur le théorème des accroissements finis qui lui même découle de l'étude des extrema intérieurs d'une fonction.

i. Extremum intérieur d'une fonction.
Un extremum intérieur où la fonction est dérivable admet une dérivée nulle :
Lemme : Soit f une fonction de $I \subset \mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, a **intérieur** à I et tel que $f(a)$ extremum. Si f dérivable en a alors $f'(a) = 0$.

Preuve . Il suffit pour cela de remarquer que la fonction $x \to \Delta f_a(x)$ change de signe en a (puisque a intérieur à I, cela a un sens), et donc, si $\lim_{x \to a} \Delta f_a(x)$ existe, autrement dit si f dérivable en a, alors cette limite, soit $f'(a)$ est nulle. □
Il suffit maintenant de trouver des critères assurant l'existence d'un tel extremum :

Proposition : Si f est continue sur $[a, b]$ avec $f(a) = f(b)$ alors f admet un extremum intérieur.

Preuve . On a vu que $f_d[a, b]$ est un segment $[m, M]$. Soit m, soit M est distinct de $f(a) = f(b)$. Mettons M. Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. Ce point c convient. □
La réunion de ces deux résultats donne le théorème suivant connu sous le nom de théorème de Rolle ([46]) :

Théorème : Soit f continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Notons que on peut trouver d'autres critères d'existence d'extremum intérieur. Ainsi

Proposition : Soit $f \in D_1[a, b]$ avec $f'(a) . f'(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ extremum intérieur de f et donc tel que $f'(c) = 0$.

Preuve . Supposons $f'(a) > 0$, on a donc $f'(b) < 0$. Donc, sur un intervalle $[a, a + \alpha]$, on a

$$\Delta f_a(x) > 0 \text{ soit } f(x) > f(a)$$

et sur un intervalle $[b - \alpha, b]$, on a

$$\Delta f_b(x) < 0 \text{ soit } f(x) > f(b)$$

On en déduit que le maximum de f sur $[a, b]$ n'est ni en a, ni en b. Ce maximum est intérieur et le résultat en découle. □

[46] Ce théorème ne prouve pas l'existence d'un extremum intérieur mais, au contraire, découle de l'existence d'un tel extremum.

ii. Conséquences
En modifiant une fonction à l'aide d'une fonction affine, ces propositions permettent d'obtenir des résultats classiques et importants :

Théorème : (Accroissements finis) Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe $c \in\ ]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \Delta f_a(b)$$

Preuve . On applique le théorème de Rolle à

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.x$$

g vérifie bien $g(a) = g(b)$ et g continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Or

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \Delta f_a(b)$$

On en déduit le résultat. □
Remarquons qu'on peut également obtenir la proposition citée plus haut disant qu'une dérivée vérifie les valeurs intermédiaires

Proposition : Soit f dérivable sur I, $x, y \in I$ et $u \in\ ]f'(x), f'(y)[$, il existe $z \in\ ]x,y[$ tel que $f'(z) = u$.

Preuve . Posons $g(t) = f(t) - u.t$, $g \in D_1(I)$ et $g'(x).g'(y) < 0$, donc il existe $z \in\ ]x,y[$ tel que $g'(z) = 0$ soit $f'(z) = u$. □
Le théorème des accroissements finis, se résumant à tout taux d'accroissement est une dérivée (lorsque la fonction est dérivable) permet l'utilisation du signe de cette dérivée pour l'étude de la fonction :

Proposition : Soit f dérivable sur I alors

$\rightarrow f'$ positive sur $I \Leftrightarrow f$ croissante
$\rightarrow f'$ nulle sur $I \Leftrightarrow f$ constante
$\rightarrow f'$ positive non nulle sur un segment $\Leftrightarrow f$ strictement croissante

On peut remarquer que les accroissements finis sont faux pour les fonctions à valeurs non numériques :

Exemple 29. *Prenons* $f(x) = \exp(ix)$, *on a* $f(2\pi) - f(0) = 0$ *et* $f'(x) = i.\exp(ix)$ *jamais nul. On ne peut donc avoir*

$$\Delta f_0(2\pi) = 2\pi.f'(c) \text{ pour un } c$$

Les accroissements finis permettent également d'obtenir un théorème de prolongement des dérivées ([47]).

Théorème : Soit f de continue à valeurs dans $\mathbf{R}$, et dérivable sur I et $a \in \bar{I} \setminus I$, on suppose que

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \text{ et } \lim_{x\to a} f'(x) = l' \in [-\infty, +\infty]$$

alors f prolongé par continuité en a par $f(a) = l$ est dérivable en a ssi $l' \neq \pm\infty$, la dérivée f' est alors continue en a.

[47] Théorème mal nommé car, en toute rigueur, on constate qu'une fonction est dérivable en un point où elle a été prolongée, on ne prolonge pas sa dérivée en ce point.

Preuve . D'après le théorème des accroissements finis, il existe $y \in]a, x[$ tel que

$$\Delta f_a(x) = f'(y)$$

on a donc $\Delta f_a(x) = l' + o(1)$ et f est dérivable en a ssi $l' \neq \pm\infty$ et dans ce cas $f'(a) = l'$.
De $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = f'(a)$, on put conclure à la continuité de f' en a (d'où le nom du théorème). □
Ce théorème, donné pour des fonctions à valeurs réelles, s'étend immédiatement aux fonctions à valeurs dans un espace normé **de dimension finie**.

4. Dérivées d'ordre supérieur

   (a) Définition, propriétés

   Dans ce chapitre, f peut être à valeurs dans un espace normé.
   Définition : Soit f de $I \subset \mathbf{R}$ vers E, de classe D_1 sur I (autrement dit dérivable sur I), pour $n \geqslant 2$, f est dite de classe D_n sur I, soit dérivable n fois sur I, ssi sa dérivée f' est de classe D_{n-1} sur I soit dérivable $n-1$ fois. On pose alors

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \text{ et } f^{(1)} = f'$$

   Définition : Pour $n \geqslant 1$, f est dite de classe C_n sur I ssi $f \in D_n(I)$ et $f^{(n)} \in C_0(I)$ autrement dit ssi $f^{(n)}$ existe et est continue sur I.
   Définition : f est dite $C_\infty(I)$ ssi $\forall n \in \mathbf{N}$, $f \in D_n(I)$

Proposition : Pour $n \geqslant 1$, les ensembles des fonctions de classe $D_n(I)$ ou de classe $C_n(I)$ à valeurs dans E sont des sous-espaces vectoriels de $C_0(I)$, on a de plus

$$C_0(I) \supset D_1(I) \supset C_1(I) \supset \cdots \supset D_n(I) \supset C_n(I) \supset D_{n+1}(I) \supset \cdots \supset C_\infty(I)$$

Les inclusions sont strictes.

Preuve . Cela résulte de la linéarité de la dérivation et de l'existence de fonctions dérivables non C_1 (par exemple $x^2 \sin \frac{1}{x}$ et continue non dérivable $|x|$). Voir le cours d'intégration. □
Le même argument de linéarité permet d'affirmer

Proposition : Soit $f, g \in D_n(I)$ ou $C_n(I)$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ alors $\lambda f + \mu g \in D_n(I)$ ou $C_n(I)$ et

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$$

De même

Proposition : (Leibnitz) Soit $f, g \in D_n(I)$ ou $C_n(I)$ à valeurs dans une algèbre normée, alors fg est $D_n(I)$ ou $C_n(I)$ et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Preuve . Cela se fait par récurrence sur n. Le résultat est acquis pour $n = 0$ ou 1. Supposons le acquis pour n, on a si $f, g \in D_{n+1}(I)$ ou $C_{n+1}(I)$,

$$(fg)' = f'g + fg' \text{ de classe } D_n(I)$$

et donc $fg \in D_{n+1}$ et

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

(égalité du triangle de Pascal $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$). Le résultat en découle. □

On obtient un résultat analogue sur la composition :

Proposition : Soit $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g : J \subset \mathbf{R} \to E$ avec $f_d(I) \subset J$, f de classe D_n ou C_n sur I et g de classe D_n ou C_n sur J, alors $g \circ f$ est de classe D_n ou C_n sur I.

Preuve . Cela a été prouvé pour $n = 1$. Supposons le résultat acquis pour $n \geqslant 1$. Soit f de classe D_{n+1} ou C_{n+1} sur I et g de classe D_{n+1} ou C_{n+1} sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) .f'$$

de classe D_n ou C_n d'après l'hypothèse de récurrence et ce qui précède. On en déduit le résultat. □

On peut également définir et caractériser les C_n-difféomorphismes :

Définition : On appelle C_n difféomorphisme de I vers J un homéomorphisme de classe C_n sur I dont la réciproque est de classe C_n sur J.

On obtient

Proposition : Soit f un homéomorphisme de classe $C_n(I)$, f est un C_n difféomorphisme ssi la dérivée f' ne s'annule jamais sur I.

Preuve . On a vu que f^{-1} dérivable ssi f' non nul et que dans ce cas

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Cela prouve le résultat pour $n = 1$. Supposons le acquis pour n, et soit f de classe C_{n+1}, on a

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \in C_n(I)$$

d'après les théorème précédents et le fait que $x \to \frac{1}{x} \in C_\infty]0, +\infty($ ou $)-\infty, 0[$ ainsi que $f' \in C_n(I)$. On en déduit le résultat pour $n+1$ et par récurrence pour tout n. □

Dans les propositions précédentes, on peut noter que le calcul explicite de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la dérivée n'est faisable facilement que pour la combinaison linéaire et le produit. La méthode classique pour montrer qu'une fonction est de classe C_∞ est de montrer que f de classe C_n implique f de classe C_{n+1}.

Il ne reste plus qu'à généraliser le théorème dit de prolongement des dérivées :

Théorème : Soit $f \in C_n(I)$ à valeurs numériques et $a \in \bar{I} \setminus I$, on suppose que

$$\forall k \in \{0, \cdots, n\}, \lim_{x \to a} f^{(k)}(x) = l_k$$

alors f s'étend en a avec $f(a) = l_0$ en une fonction de classe C_n sur $I \cup \{a\}$. On a de plus $f^{(k)}(a) = l_k$ pour $k = 0 \cdots n$.

Preuve . Cela se prouve par récurrence sur n. le théorème a déjà été vu pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons le résultat acquis pour n et soit $f \in C_{n+1}(I)$ telle que

$$\forall k \in \{0, \cdots, n+1\}, \lim_{x \to a} f^{(k)}(x) = l_k$$

f étendu à $I \cup \{a\}$ par $f(a) = l_0$ est C_1 sur $I \cup \{a\}$ et $f'(a) = l_1$. En appliquant le résultat acquis pour n à f', on obtient f' de classe C_n sur $I \cup \{a\}$ et $f'^{(k)}(a) = l_{k+1}$ soit $f^{(k+1)}(a) = l_{k+1}$. □

Là encore, ce résultat s'étend aux fonctions à valeurs dans E de dimension finie, il suffit de raisonner coordonnée à coordonnée.

(b) Formule de Taylor

i. Lemme préliminaire, généralisation du théorème de Rolle

Le théorème de Rolle affirme qu'une fonction s'annulant deux fois a une dérivée qui s'annule une fois. Cela se généralise de la façon suivante :

Définition : Soit $f \in C_n(I)$ et $a \in I$; a est dit zéro de multiplicité p de f dès que

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p-1)}(a) = 0$$

On note que a zéro de multiplicité p de f est un zéro de multiplicité $p-1$ de f' si on prend comme convention qu'un zéro d'ordre 0 n'est pas un zéro (!).

Compter les zéros d'une fonction se fait en général en les comptant avec leur ordre. Ce dernier est souvent minoré sans être connu avec précision. On peut aussi noté l'existence de zéro d'ordre infini :

Exemple 30. *Pour $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, on a $f^{(n)}(x) \to 0$ quand x tend vers 0 et donc $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. 0 est donc un zéro d'ordre infini de f.*

Le théorème de Rolle se généralise comme suit

Proposition : Soit f de classe $C_n(I)$ s'annulant p fois, alors pour $k \leqslant \min(n,p)$, $f^{(k)}$ s'annule $p-k$ fois sur I. De plus, si f admet au moins deux zéros distincts, pour $k \leqslant \min(n,p), k \neq p, f^{(k)}$ s'annule au moins une fois sur $\overset{\circ}{I}$.

Preuve . Si f n'a qu'un seul zéro de multiplicité p, alors par définition,

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p-1)}(a) = 0$$

et a est zéro d'ordre $p-k$ de $f^{(k)}$.

Supposons que f a plusieurs zéros a_1 d'ordre $\alpha_1, \cdots, a_q$ d'ordre α_q avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_q$, on a

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha_k = p$$

On a $a_1, \cdots, a_p$ zéros d'ordre $\alpha_1 - 1, \cdots, \alpha_p - 1$ de f'. De plus, le théorème de Rolle appliqué à chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ pour $k = 1 \cdots q-1$ permet d'écrire

$$\exists b_k \in]a_k, a_{k+1}[, f'(b_k) = 0$$

b_k est donc un zéro de f', d'ordre (au moins) 1 et intérieur à I. On a donc trouvé

$$\sum_{k=1}^{q} (\alpha_k - 1) + p - 1 = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k - 1 = p - 1$$

zéros de f' dont un au moins intérieur à I. En itérant le procédé, on obtient le résultat pour $f^{(k)}$, $k = 1, \cdots, \min(n,p)$. □

Ce résultat est à la base de nombreux théorèmes notamment dans l'approximation de fonctions.

ii. Principe

L'idée est d'approcher une fonction f par un polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que la fonction $f-P$ ait n zéros comptés avec leur ordre. On peut remarquer que lorsque f est un polynôme de degré $n-1$, on a dans ce cas $f = P$. Cela est un cas particulier de la proposition suivante, particulièrement utile :

Proposition : Soit $f \in C_n(I)$, P un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $f-P$ ait n zéros (comptés avec leur ordre) a_1 d'ordre $\alpha_1, \cdots, a_q$ d'ordre α_q, alors

$$\forall x \in I, \exists y \in I \text{ tel que } f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(y)}{n!} . \prod_{k=1}^{q} (x - a_i)^{\alpha_i}$$

Preuve . On a donc $\sum_{k=1}^{q}\alpha_i = n$. Le résultat est clair si x figure parmi les a_i. Supposons donc $x \neq a_i$ et posons

$$A = n!.\frac{f(x) - P(x)}{\prod_{k=1}^{q}(x - a_i)^{\alpha_i}}$$

et soit

$$g(t) = f(t) - P(t) - \frac{A}{n!}.\prod_{k=1}^{q}(t - a_i)^{\alpha_i}$$

Par construction, $g(x) = 0$, de plus, a_i est un zéro d'ordre α_i de $f - P$ et de $\prod_{k=1}^{q}(X - a_i)^{\alpha_i}$ donc de g. g admet donc $\sum_{k=1}^{q}\alpha_i + 1 = n + 1$ zéros sur I, donc $g^{(n)}$ admet un zéro sur I et il existe $y \in I$ tel que

$$g^{(n)}(y) = 0$$

soit

$$f^{(n)}(y) - 0 - A = 0 \text{ soit } f^{(n)}(y) = A$$

Le résultat est prouvé. □

iii. Série de Taylor, Formules de Taylor

La série de Taylor d'ordre n d'une fonction f en a est l'unique polynôme de degré n tel que a soit zéro d'ordre $n + 1$ de $f - P$. On a donc

Définition : Soit $f \in D_n(I)$ (en fait $D_{n-1}(I)$ et dérivable n fois en a suffit), la série de Taylor de f en a d'ordre n est

$$S_n(f)_a(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.(x - a)^k$$

On obtient immédiatement

$$S_{n-p}\left(f^{(p)}\right)_a(x) = \sum_{k=0}^{n-p}\frac{f^{(k+p)}(a)}{k!}.(x - a)^k = (S_n(f)_a)^{(p)}(x)$$

En appliquant ce qui précède à f sur un intervalle $[a, b]$, on obtient lorsque f est dérivable $n + 1$ fois le résultat suivant :

Proposition : (Formule de Taylor Lagrange), soit $f \in D_{n+1}(I)$, $a, b \in I$ avec $a \neq b$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - S_n(f)_a(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(b - a)^{n+1}$$

Preuve . Cela résulte directement de la proposition démontrée dans le paragraphe précédent en remarquant que $f - S_n(f)_a$ admet a comme zéro d'ordre $n + 1$. □

Cette formule s'écrit en général comme

$$\text{Soit } h \in \mathbf{R}, \exists\theta \in]0, 1[, f(a + h) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k + \frac{f^{(n+1)}(a + \theta.h)}{(n+1)!}.h^{n+1}$$

On peut noter que lorsque $f^{(n+1)}$ est bornée, par exemple lorsque $f \in C_{n+1}(I)$, alors

$$\frac{f^{(n+1)}(a + \theta.h)}{(n+1)!}.h^{n+1} = O\left(h^{n+1}\right) = o(h^n)$$

Cela en fait est vrai dès que $f \in D_{n-1}(I)$ et $f^{(n)}(a)$ existe. C'est la formule de Taylor Young :

Théorème : (Taylor Young) Soit $f \in D_{n-1}(I)$ tel que $f^{(n)}(a)$ existe, alors f admet un développement limité à l'ordre n en a. Celui ci est donné par

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k + o(h^n)$$

Preuve . Soit $h \in \mathbf{R}, h \neq 0$. Plaçons nous sur $[a, a+h]$ et soit

$$A = n!.\frac{f(a+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k}{h^n}$$

La fonction

$$g(t) = f(a+t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.t^k - \frac{A}{n!}.t^n$$

admet h comme zéro d'ordre 1 et 0 comme zéro d'ordre n. Donc sa dérivée $(n-1)^{\text{ème}}$ s'annule au moins une fois sur $]0, h[$. Donc il existe $h' \in]0, h[$ tel que

$$g^{(n-1)}(h') = 0 \text{ soit } f^{(n-1)}(a+h') - f^{(n-1)}(a) - A.h' = 0$$

On a donc

$$\exists h' \in]0, h[, A = \Delta f_a^{(n-1)}(a+h')$$

Si $f^{(n)}(a)$ existe, comme $|h'| < |h|$, on aura $\Delta f_a^{(n-1)}(a+h') = f^{(n)}(a) + o(1)$ soit enfin

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k + \left(\frac{f^{(n)}(a) + o(1)}{n!}\right).h^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k + o(h^n)$$

Le résultat est prouvé. □

Il est important de noter que la formule de Taylor Young (qui se résume en l'existence d'un développement limité) est une comparaison de fonctions et non un égalité algébrique. **On ne peut donc** obtenir une inégalité, majoration etc à partir de cette formule. Pour obtenir une telle inégalité, il faut utiliser la formule de Taylor Lagrange qui, elle, est une égalité algébrique entre réels.

Exemple 31. *On veut obtenir l'inégalité pour $x \in [0, \pi]$*

$$\sin x \in \left[x - \frac{x^3}{6}, x\right]$$

*De $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, on obtient juste que $\sin x - x \sim -\frac{x^3}{6}$ donc $\sin x - x \leqslant 0$ pour x **proche de** 0 sans que l'on puisse mieux préciser. Il nous faut donc écrire*

$$\forall x \in [0, \pi], \exists y \in [0, x], \sin x = x - \frac{1}{6}.x^3 + \frac{\sin y}{24}.x^4$$

*De $\sin y \in [0, 1]$ pour $y \in [0, \pi]$, on déduit l'inégalité demandée **pour tout** $x \in [0, \pi]$.*

5. Fonctions convexes

   (a) Définition des fonctions convexes

   Rappelons qu'un convexe est un ensemble C tel que si $x, y \in C$, alors

$$[x, y] = \{x + t.(y - x), t \in [0, 1]\} \subset C$$

De tels ensembles sont stables par intersection. Tout barycentre positif d'éléments d'un convexe est dans ce convexe.
E est un E.V.N, f est une application d'un convexe C de E vers $\mathbf{R}$.
Définition : f est dite convexe si et seulement si

$$\forall x,y\in C,\forall t\in[0,1],f(t.x+(1-t).y)\leqslant t.f(x)+(1-t).f(y)$$

f est concave si $-f$ est convexe. f est strictement convexe si l'égalité n'a lieu que pour $t=0$ ou 1.

Proposition : f est convexe si et seulement si l'ensemble $\{(x,f(x)),x\in C\}$ noté *epi* (f) (epigraphe de f) est une partie convexe de $E\times\mathbf{R}$.

Preuve . Si f est convexe, soit (x,r) et (y,s) appartenant à *epi* (f). Soit $\lambda\in[0,1]$. On a

$$\lambda.(x,r)+(1-\lambda).(y,s)=(\lambda x+(1-\lambda)y,\lambda r+(1-\lambda)s)$$

Or

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda.f(x)+(1-\lambda).f(y)\leqslant\lambda r+(1-\lambda)s$$

On en déduit $(\lambda x+(1-\lambda)y,\lambda r+(1-\lambda)s)\in$ *epi* (f). Réciproquement, si *epi* (f) est convexe, considérons $x,y\in C$ et $t\in[0,1]$, on a $t.(x,f(x))+(1-t).(y,f(y))\in$ *epi* (f) d'où

$$(t.x+(1-t).y\ ;\ t.f(x)+(1-t).f(y))\in epi\,(f)$$

et

$$f(t.x+(1-t).y)\leqslant t.f(x)+(1-t).f(y)$$

□

En écrivant que

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^p\alpha_i}.\sum_{i=1}^p\alpha_i.x_i=\frac{1}{\alpha_1+\sum_{i=2}^p\alpha_i}.\left(\alpha_1.x_1+\sum_{i=2}^p\alpha_i.\left(\frac{1}{\sum_{i=2}^p\alpha_i}.\sum_{i=2}^p\alpha_i.x_i\right)\right)$$

on déduit qu'un barycentre positif (i.e à poids positifs) peut s'obtenir par calculs successifs de barycentres psotifs de deux points. Or la définition d'une fonction convexe s'interprète en disant que l'image du barycentre positif de deux points est inférieure au barycentre positif (avec même poids) de l'images des deux points. On en déduit le résultat particulièrement important suivant :

Proposition : Si f est convexe de C vers $\mathbf{R}$, si $x_1,\cdots,x_p\in C$ et $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ sont p réels positifs, alors l'image du barycentre des (x_i,α_i) est inférieure au barycentre des $(f(x_i),\alpha_i)$. i.e

$$f\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^p\alpha_i}.\sum_{i=1}^p\alpha_i.x_i\right)\leqslant\frac{1}{\sum_{i=1}^p\alpha_i}.\sum_{i=1}^p\alpha_i.f(x_i)$$

Exemple 32. *Prenons par exemple $f(x)=t^\alpha$. On verra plus loin que si $\alpha\geqslant 1$, cette fonction est convexe sur $[0,+\infty($. Considérons n réels positifs $a_1,\cdots,a_p$ et soit $p>q>0$, on a $\frac{p}{q}>1$ et donc*

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_i^q\right)^{\frac{p}{q}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(a_i^q)^{\frac{p}{q}}$$

soit

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ *est la moyenne d'ordre* p *des* $a_1, \cdots, a_n$. $p = 1$ *correspond à la moyenne arithmétique,* $p = 2$ *à la moyenne quadratique* ([48]). *On vient de prouver la croissance de ces moyennes en fonction de* p.

(b) Opérations sur les fonctions convexes

Peu d'opérations sont possibles avec les fonctions convexes. Essentiellement :

Proposition : Si $f_1, \cdots, f_p$ sont p fonctions convexes sur C alors

$$g = \sup(f_1, \cdots, fp) \text{ est convexe sur } C$$

et si $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ sont des réels positifs alors $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i . f_i$ est convexe sur C

Preuve . La première affirmation vient de

$$epi\,(g) = \cap_{i=1}^{p} epi\,(f_i)$$

convexe car intersection de convexes. La deuxième affirmation est claire. □

L'intérêt des fonctions convexes réside dans l'étude de leurs extrema et dans leur régularité :

(c) Extremum des fonctions convexes

Comme pour tout x d'un segment $[a,b]$, $f(x)$ est inférieur à un barycentre positif de $f(a)$ et $f(b)$, on a $f(x) \leqslant \max f(a), f(b)$. On en déduit les résultats suivants :

Proposition : Si f est convexe sur C, si $a \in \mathbb{R}$, $f_r^{-1}\left(\left]-\infty, a\right]\right)$ et $f_r^{-1}\left(\left]-\infty, a\right[\right)$ sont des convexes. Entre autres $f_r^{-1}\left\{\inf_{x\in C} f(x)\right\}$ est un convexe (éventuellement vide).

Proposition : Si f est convexe sur C, on a l'équivalence

$$x \text{ minimum local } \Leftrightarrow x \text{ minimum global}$$

Preuve . Le sens réciproque est évident. Supposons donc x minimum local, $\exists r > 0, x$ minimum de f sur $B(x,r) \cap C$. Soit $y \in C$, $\exists t \in \left]0,1\right[, tx + (1-t)\,y \in B(x,r)$. Pour ce t, on a

$$f(x) \leqslant f(tx + (1-t)\,y) \leqslant tf(x) + (1-t) . f(y)$$

d'où $f(y) \geqslant f(x)$ et x minimum global de f. □

(d) Régularité des fonctions convexes sur un intervalle

La convexité impose une grande régularité ; continuité, différentiabilité sont obtenues au prix de peu d'hypothèses. Ces résultats, délicats, s'obtiennent simplement dans un cadre réel en étudiant le taux d'accroissement :

Définition : Si f est une fonction de $I \subset \mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, on définit pour $x \in I$ la fonction taux d'accroissement Δf_x par

$$\Delta f_x : \left\{ \begin{array}{ccc} I \backslash \{x\} & \to & \mathbf{R} \\ y & \to & \Delta f_x(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \end{array} \right.$$

Rappelons que $\Delta f_x(y) = \Delta f_y(x)$ représente la pente de la corde liant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

Proposition : Soit f une fonction de $I \subset \mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, f est convexe si et seulement si pour tout x de I la fonction Δf_x est croissante sur $I \backslash \{x\}$.

[48] cela s'étend à $\mathbf{R}$ avec $p = 0$ moyenne géométrique, $p = -1$ moyenne harmonique, $p = +\infty$ correspond au maximum des a_i, $p = -\infty$ au minimum.

On déduit de cela un résultat de régularité de f incluant entre autres la continuité de f sur I.

Théorème : Soit f une fonction convexe de $I \subset \mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ alors f est continue sur l'intérieur de I et admet en tout point de cet intérieur une dérivée à droite et à gauche. Si $x, y, z \in \overset{\circ}{I}$ avec $x < y < z$, on a

$$f'_d(x) \leqslant \Delta f_x(y) \leqslant f'_g(y) \leqslant f'_d(y) \leqslant \Delta f_y(z) \leqslant f'_g(z)$$

On pourrait avec ce théorème montrer qu'une fonction convexe est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ sauf en un nombre au plus dénombrable de points. Lorsque l'on sait f dérivable sur I, la caractérisation de la convexité de f est simple :

Théorème : Soit f une fonction de $I \subset \mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$:

$$\text{Si } f \in D_1(I)\,,\ \ f \text{ convexe} \Leftrightarrow\ f' \text{ croissante}$$
$$\text{Si } f \in D_2(I)\,,\ \ f \text{ convexe } \Leftrightarrow\ f" \geqslant 0$$

La croissante de f' lorsqu'elle existe implique sa continuité.

Proposition : f convexe et dérivable sur I implique f' continue sur I.

(e) Généralisation.

Une partie des résultats précédents se généralisent aux fonctions convexes en général :

Théorème : Soit f convexe sur C ouvert, on a l'équivalence

$$f \text{ continue } \Leftrightarrow\ \exists O \text{ ouvert de } C \text{ tel que } f \text{ majorée sur } O$$

([49])

Preuve . Sens direct : Si f est non majorée sur tout ouvert de C, entre autres, f est non majorée sur les voisinages des points de C donc non continue.
Sens réciproque : Il existe un ouvert de C où f majorée. Si x_0 est un point de cet ouvert,

$$\exists M > 0, \exists r_0 > 0, \forall y \in E, \|y - x_0\| < r_0 \Rightarrow y \in C \text{ et } f(y) \leqslant M$$

Soit $x \in C$, montrons $\exists r_x > 0$ tel que f majorée sur $B(x, r_x)$. Si $x = x_0$, le problème est résolu. Sinon, C est ouvert donc

$$\exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset C$$

L'idée consiste à prendre comme boule centrée sur x une boule obtenue par homothétie de $B(x_0, r_0)$. Le centre de cette homothétie doit être dans C et sur l'axe (x, x_0). Soit donc y avec

$$\|y - x\| = \frac{\varepsilon}{2},\ y \in D_{x_0, x - x_0}$$

D'où

$$y = x + \frac{\varepsilon}{2.\|x - x_0\|}.(x - x_0)$$

On a

$$x = y + \frac{\varepsilon}{2.\left(\frac{\varepsilon}{2} + \|x - x_0\|\right)}.(x_0 - y) = h_{y,\lambda}(x_0)$$

[49] L'exemple

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \text{ ou } 1 \\ 0 \text{ si } x \in \,]0, 1[\end{cases}$$

montre que cette hypothèse est nécessaire.

où $\lambda = \frac{\varepsilon}{2.\left(\frac{\varepsilon}{2}+\|x-x_0\|\right)} \in]0,1[$, $h_{y,\lambda}$ désignant l'homothétie de centre y de rapport λ. L'image de la boule $B(x_0, r_1)$ par $h_{y,\lambda}$ est la boule $B(x, \lambda r_1)$. Prenons

$$r_1 = \min\left(r_0, \frac{\varepsilon}{2.\lambda}\right) \text{ et } r_x = \lambda r_1$$

On a

$$h_{y,\lambda}(B(x_0, r_1)) = B(x, r_x) \text{ et } f \text{ majorée sur } B(x_0, r_1) \text{ par } M$$

Soit $u \in B(x, r_x), \exists z \in B(x_0, r_1), u = h_{y,\lambda}(z)$ soit

$$u = y + \lambda(z - y) = (1-\lambda) y + \lambda z$$

D'où

$$f(u) \leqslant (1-\lambda) f(y) + \lambda.M$$

et f majorée sur $B(x, r_x)$.
Notons M_x un majorant de f sur $B(x, r_x)$. Prenons $u \in B\left(x, \frac{r_x}{2}\right)$. Notons $\|u-x\| = \alpha.\frac{r_x}{2}$ où $\alpha \in]0,1]$, on a pour $v = x + \frac{r_x}{2.\|u-x\|}.(u-x) = x + \frac{1}{\alpha}.(u-x)$

$$u = (1-\alpha).x + \alpha.v$$

D'où

$$f(u) - f(x) \leqslant (1-\alpha).f(x) + \alpha.f(v) - f(x) \leqslant 2\alpha M_x$$

Considérons maintenant $w = x - \frac{r_x}{2.\|u-x\|}.(u-x) = x - \frac{1}{\alpha}.(u-x)$, on a

$$x = \frac{\alpha}{1+\alpha}.w + \frac{1}{1+\alpha}u$$

D'où

$$f(x) \leqslant \frac{\alpha}{1+\alpha}.M_x + \frac{1}{1+\alpha}f(u)$$

et

$$f(u) - f(x) \geqslant -\frac{2\alpha M_x}{1+\alpha} \geqslant -2\alpha M_x$$

Finalement

$$|f(u) - f(x)| \leqslant \frac{4M_x}{r_x}.\|u-x\|$$

et f continue en x. □
En dimension finie, cela sera toujours le cas :

Proposition : Si f convexe sur C convexe ouvert de E de dimension finie, alors f est continue.

Preuve . Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ base de E et $a \in C$, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall t_i \in [0, r], a + \sum_{i=1}^{p} t_i.e_i \in C$$

L'ensemble $O = \{a + \sum_{i=1}^{p} t_i.e_i, t_i \in]0, r[, i = 1 \cdots p\}$ est inclus dans C et est constitué de barycentres positifs de $a, a+e_1, \cdots, a+e_p$.
Si M majore $f(a), f(a+e_1), \cdots, f(a+e_p)$, M majore f sur O ouvert de C. D'après ce qui précède, f est continue sur C. □
Remarque : Le théorème sur la dérivabilité des fonctions convexes et la continuité de la dérivée lorsqu'elle existe se généralise sur $\mathbf{R}^n$ avec le résultat suivant : Si f est convexe sur l'ouvert convexe $U \subset \mathbf{R}^n$ et si f admet des dérivées partielles en tout point de U alors f est différentiable.

2.4. Suites de fonctions.

1. Type de convergences

   Une suite de fonctions est une suite de l'ensemble F^D où $D \subset E$ avec F et en général E des espaces vectoriels normés. Une telle suite, notée $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ peut être vue soit comme une famille de suites à paramètres, pour $x \in D$, on étudie la suite $(f_n(x))$, soit comme une suite de fonctions, la norme naturelle sur les fonctions étant la norme $\|\ \|_\infty$, soit comme une suite de l'espace vectoriel F^D, cet espace devant être muni d'une norme donné. Cela nous donne à chaque fois une notion différente de convergence d'une suite de fonctions. Dans la suite, E, F sont deux espaces normés et $D \subset E$. (f_n) est une suite de F^D

   Le plus important est constitué par les suites de fonctions d'un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. C'est dans ce cadre que seront pris les exemples.

   (a) Convergence simple.
   Définition : La suite (f_n) convergera simplement vers la fonction f sur D ssi

   $$\forall x \in D, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

   Cette notion de convergence ne dépend que de la norme sur F. Dans la pratique, cela revient à montrer que $\|f_n(x) - f(x)\|$ converge vers 0 pour tout x de D.
   Les propriétés des limites de suites permettent d'écrire immédiatement

Proposition : La limite d'une suite de fonction convergeant simplement est unique.

   On obtient de même qu'une combinaison linéaire de suite de fonctions convergeant simplement converge simplement vers la combinaison linéaire des limites. De façon générale, les théorèmes d'arithmétique des limites sur l'espace vectoriel normé F se généralisent immédiatement en leur équivalent sur les suites de fonction convergeant simplement.
   Remarque : La notion de converge simple est locale, cela veut dire que si une suite de fonctions converge simplement vers f sur chaque $D_i, i \in I$, elle converge simplement vers f sur $D = \cup_{i\in I} D_i$.

   (b) Convergence uniforme
   La notion de convergence uniforme peut être ammenée de plusieurs façons, la plus simple consiste à dire qu'une suite de fonction (f_n) convergera uniformément vers une fonction f ssi la borne supérieure de la différence tend vers 0 autrement dit
   Définition : La suite (f_n) convergera uniformément vers la fonction f sur D ssi

   $$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

   (le sup pouvant éventuellement être égal à $+\infty$).
   Dans la partique, on préfère la caractérisation suivante :

Proposition : La suite (f_n) convergera uniformément vers la fonction f sur D ssi il existe un rang n_0 et une suite (v_n) convergeant vers 0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \forall x \in D, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant v_n$$

   On remarque tout de suite qu'une suite convergeant uniformément vers f sur D converge simplement vers f ce qui permet d'avoir l'unicité de la limite. On peut également noter que (f_n) converge uniformément vers f sur D ssi

   $$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, (f - f_n) \text{ borné et } (f_n - f)_{n\geqslant n_0} \overset{\|\ \|_\infty}{\to} 0$$

   soit encore ssi la suite $\|f_n - f\|_{\infty,D}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers 0. Cette notion de convergence a donc toutes les propriétés des convergences de suites pour une norme donnée (combinaison linéaire, produit dans une algèbre normée de deux suites convergeant uniformément, etc). Pour cette raison, on écrira

$$(f_n) \overset{\| \|_{\infty,D}}{\to} f$$

Cependant, cette notion diffère de la convergence pour la norme ∞ en ce sens qu'elle ne se limite pas aux seules fonctions bornées sur D ; la suite de fonction $\left(x + \frac{1}{n+1}\right)$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers la fonction x alors que ni x ni $x + \frac{1}{n+1}$ ne sont bornées (on ne peut donc écrire $\|x\|_{\infty,\mathbf{R}}$ bien que l'on puisse écrire $\left\|\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - x\right\|_{\infty,\mathbf{R}}$). De plus, si la multiplication d'une suite convergeant uniformément sur D (par exemple $1 + \frac{1}{n+1}$ sur $\mathbf{R}$ qui converge vers 1) par une fonction sur D non bornée (par exemple x sur $\mathbf{R}$) peut ne pas donner une suite convergeant uniformément (ici, $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right).x$ converge simplement vers x sur $\mathbf{R}$ mais la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbf{R}$ puisque la différence n'est pas bornée).

Remarque : Contrairement à la convergence simple, la convergence uniforme sur D est une notion globale. La suite $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right).x$ converge uniformément vers x sur tout segment $[-a, a]$ mais pas sur $\mathbf{R} = \cup_{a>0}[-a, a]$. Il est donc **impératif** de préciser **où** la suite de fonction converge uniformément.

Remarque : Pour prouver la non convergence uniforme, il suffit de montrer qu'il existe $(x_n) \in D^{\mathbf{N}}$ tel que $\|f_n(x_n) - f(x_n)\|$ soit non convergente vers 0. En effet, en cas de convergence uniforme sur D, on a

$$\|f_n(x_n) - f(x_n)\| \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,D} \to 0$$

(c) Variante de la convergence uniforme

i. Convergence uniforme sur tout compact
Le fait que cette notion ne soit pas locale est assez ennuyeux. Cependant, beaucoup de conséquences auront un aspect local, ainsi la continuité de la limite si les f_n sont continues, etc. Pour pouvoir appliquer ces propriétés, il suffit d'avoir pour chaque point de D un voisinage de ce point où la convergence est uniforme, c'est la notion de convergence locale uniforme :
Définition : (f_n) converge vers f de façon localement uniforme ssi $\forall x \in D$, il existe un voisinage V de x tel que

$$(f_n) \overset{\| \|_{\infty}}{\to} f \text{ sur } V \cap D$$

Dans la pratique, lorsque E est de dimension finie entre autres (donc dans le cas de fonctions à variable réelle), tout point de D admettra un voisinage compact. On peut dans ce cas s'interesser à la convergence de f_n sur les compacts de D :
Définition : (f_n) converge vers f uniforment sur tout compact de D ssi $\forall C \subset D$, C compact,

$$(f_n) \overset{\| \|_{\infty}}{\to} f \text{ sur } C$$

Ces types de convergence, plus facile à obtenir que la convergence uniforme sur D permettent de déduire les mêmes propriétés locales de la limite f que la convergence uniforme sur D.

ii. Convergence normale
On a vu que l'ensemble des fonctions bornées à valeur dans un complet est complet pour la norme $\| \|_{\infty}$. Cela se généralise à la convergence uniforme :
Définition : Soit (f_n) une suite de fonction de $D \subset E$ vers F. On dit que cette suite vérifie le critère de Cauchy uniforme ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n, p \geqslant n_0, \|f_n - f_p\|_{\infty,D} < \varepsilon$$

(ce qui sous entend $f_n - f_p$ bornée pour $n \geqslant n_0$).

Proposition : Si F est complet, une suite de fonction vérifiant le critère de Cauchy uniforme converge uniformément vers une fonction f de D vers F.

Preuve . Celle ci est une généralisation du cas des fonctions bornées sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$:

- Construction de f :
  Pour $x \in D$, la suite $(f_n(x))$ vérifie
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n, p \geqslant n_0, \|f_n(x) - f_p(x)\| \leqslant \|f_n - f_p\|_\infty < \varepsilon$$
  donc est de Cauchy. F étant supposé complet, il existe une limite qu'on va noter $f(x)$ telle que
  $$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$
  (f_n) converge simplement vers f
- La convergence est uniforme sur D :
  Soit $\varepsilon > 0$,
  $$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n, p \geqslant n_0, \forall x \in D, \|f_n(x) - f_p(x)\| \leqslant \|f_n - f_p\|_\infty < \varepsilon$$
  Donc
  $$\forall n \geqslant n_0, \forall p \geqslant n_0, \forall x \in D, \|f_n(x) - f_p(x)\| \leqslant \varepsilon$$
  et entre autres, en faisant tendre p vers $+\infty$
  $$\forall n \geqslant n_0, \forall x \in D, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$
  soit enfin
  $$\forall n \geqslant n_0, \|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$
  Finalement, $(f_n) \overset{\|\ \|_\infty}{\to} f$ sur D. □

Là encore, cette caractérisation est difficile à utiliser dans la pratique et on utilise plutôt la convergence normale, équivalent de la convergence absolue.

Définition : Soit $\sum u_n(x)$ une série de fonctions sur D, cette série de fonctions sera normalement convergente sur D ssi il existe un rang n_0 à partir duquel u_n est bornée sur D et tel que
$$\sum_{n \geqslant n_0} \|u_n\|_\infty \text{ converge}$$

Remarque : Certains imposent $n_0 = 0$, autrement dit considèrent que la convergence normale équivaut exactement à la convergence absolue dans l'espace des fonctions bornées sur D. Cela ne change pas les résultats, on pourra préférer dans ce cas la qualification de "convergence normale à partir d'un certain rang" pour la définition précédente.

Dans la pratique, on notera que

Proposition : $\sum u_n(x)$ convergera normalement ssi il existe une suite (v_n) positive de série convergente et n_0 un rang tel que
$$\forall n \geqslant n_0, \forall x \in D, \|u_n(x)\| \leqslant v_n$$

Lorsque F est complet (par exemple de dimension finie), une série normalement convergente vérifiera le critère de Cauchy uniforme et donc convergera uniformément.

Proposition : Si F complet, si $\sum u_n(x)$ converge normalement, alors la convergence vers $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est uniforme sur D.

Preuve . Il suffit de noter que pour $n \geqslant n_0$

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} u_k(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty \to 0$$

□

Notons qu'on peut également parler de convergence localement normale d'une série de fonctions ou de convergence normale sur tout compacts de D.

Remarque : Pour montrer qu'une convergence n'est pas normale, il suffit simplement de montrer que soit les (u_n) ne sont pas bornées à partir d'un certain rang n_0, soit que la série $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|u_n\|_\infty$ diverge. Mais une série peut converger uniformément sur D sans que la convergence soit normale. C'est souvent le cas pour les séries de fonctions numériques lorsqu'on peut appliquer le critère des séries alternées. On peut ainsi énoncer :

Théorème : Soit $\sum u_n(x)$ une série de fonctions de $I \subset \mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ telle qu'il existe un rang n_0 tel que

$\to \forall n \geqslant n_0, (-1)^n u_n(x) \geqslant 0$

$\to (u_n)$ converge uniformément vers 0 sur I

$\to \forall x \in I, |u_n(x)|_{n \geqslant n_0}$ est décroissante

alors la série de fonctions converge uniformément sur I.

Preuve . Pour $x \in I$, la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n(x)$ est convergente puisque les hypothèses du critère spécial des séries alternées s'appliquent. De plus on peut écrire pour $n \geqslant n_0$

$$\forall x \in I, \left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \|u_{n+1}\|_{\infty, I} \to 0$$

et la convergence est uniforme sur I. □

Il n'est pas toujours facile de montrer qu'une convergence de série n'est pas uniforme. Dans la pratique, on procède comme suit : Soit $\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ convergeant vers $U(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$. Le reste $R_n(x)$ est défini par

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$$

Ecrire que la convergence est uniforme revient à dire que $\|R_n\|_\infty$ est défini pour n assez grand et tend vers 0. R_n est une somme infinie donc peu pratique à manipuler. Mais de

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x) = R_n(x) - R_{2n}(x)$$

on obtient que si la convergence est uniforme

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x) \right\|_\infty \leqslant \|R_n\|_\infty + \|R_{2n}\|_\infty \to 0$$

et donc $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x)$ converge uniformément vers 0 sur D. Montrer que ce n'est pas le cas permet bien d'en déduire la non convergence uniforme sur I de la série $\sum u_n(x)$. Pour cela, il suffit de trouver $(x_n) \in D^{\mathbf{N}}$ telle que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x_n) \text{ non convergente vers } 0$$

Exemple 33. *Considérons sur* $]1,+\infty($,

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$$

La série converge bien simplement. Comme $\left\|\frac{1}{n^x}\right\|_{\infty,]1,+\infty(}=\frac{1}{n}$ *de série divergente, la convergente n'est pas normale sur* $]1,+\infty($. *Pour montrer la non convergence uniforme, il suffit (et non il faut) de trouver* $x_n>1$ *tel que*

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^{x_n}}$$

ne converge pas vers 0. *Comme*

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^{x_n}}\geqslant\frac{n}{(2n)^{x_n}}\text{ soit }\frac{n^{1-x_n}}{2^{x_n}}$$

$x_n=1+\frac{1}{n}$ *convient, on a*

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^{1+\frac{1}{n}}}\geqslant\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}.2^{1+\frac{1}{n}}}\to\frac{1}{2}\neq 0$$

(d) Convergence pour une norme

Une troisième façon de traiter les suites de fonctions est de considérer F^D comme un espace vectoriel normé par une norme N, une suite de fonctions (f_n) convergera vers f ssi $N(f_n-f)$ converge vers 0.

Exemple 34. *Ainsi, sur l'espace vectoriel* $L_1(I)$ *des fonctions intégrables sur* I, *on a*

$$N_1(f)=\int_I|f|$$

qui en fait un espace vectoriel normé. La notion de convergence ainsi obtenue est la convergence en moyenne sur I. *On a de même la convergence en moyenne quadratique en considérant les fonctions de carrés intégrables sur* I *avec*

$$N_2(f)=\left(\int_I|f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ce type de convergence n'implique pas forcément la convergence simple, on peut même imaginer une limite différente de la limite simple. Ainsi si on considère $L_1[0,1]$ et

$$f_n(x)=\sqrt{n}.x^n$$

On a

$$N_1(f_n)=\frac{\sqrt{n}}{n+1}\text{ et }(f_n)\to_{N_1}0$$

Or $f_n(1)=\sqrt{n}$ qui ne converge pas. Cela n'empêche pas le fait que la suite $(\sqrt{n}.x^n)$ caractérise la fonction 0 sur $[0,1]$ vis à vis de la norme N_1.

Un bon exemple de l'utilité de ce type de convergence se trouve dans les séries de Fourier (cf plus loin).

2. Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

Le problème consiste à savoir quelles sont les propriétés, vérifiées par les f_n, dont va "hériter" la limite éventuelle de la suite (f_n).

(a) Continuité et limites.

Le problème se résume en peut on compléter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) & \overset{x\to a}{\rightrightarrows} & l_n \\ \downarrow_{n\to+\infty} & & \downarrow_{n\to+\infty} \\ f(x) & & l \end{array}$$

en

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) & \overset{x\to a}{\rightrightarrows} & l_n \\ \downarrow_{n\to+\infty} & & \downarrow_{n\to+\infty} \\ f(x) & \overset{x\to a}{\rightrightarrows} & l \end{array}$$

où a est un point adhérent à D (éventuellement infini dans le cas de $D \subset \mathbf{R}$). Cela se résume aussi en la validité de l'écriture

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

Cette égalité est **fausse en général**.

i. Cas de la convergence simple

On ne peut rien déduire, l'exemple suivant montrer que cela peut être faux :

Exemple 35. *On prend* $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$ *sur* $]0,1[$, *on obtient le diagramme suivant*

$$\begin{array}{cccc} x^{\frac{1}{n}} & \overset{x\to 0}{\rightrightarrows} & & 0 \\ \downarrow_{n\to+\infty} & & & \downarrow_{n\to+\infty} \\ 1 & \overset{x\to 0}{\rightrightarrows} & 1 \neq & 0 \end{array}$$

ii. Cas de la convergence uniforme.

Dans ce cas, le résultat est valide ; on obtient le théorème suivant :

Théorème : Soit (f_n) convergeant uniformément vers f sur D, $a \in \bar{D}$, on suppose que

$$\lim_{x\to a} f_n(x) = l_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} l_n = l$$

alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

Preuve . La démonstration peut se faire par les suites. Soit (x_p) une suite convergeant vers a. Montrons que $f(x_p)$ converge vers l. Pour cela, on utilise l'inégalité suivante valable dès que $f - f_n$ bornée ce qui est le cas pour n assez grand puisqu'il y a convergence uniforme sur D

$$\|f(x_p) - l\| \leqslant \|f - f_n\|_\infty + \|f_n(x_p) - l_n\| + \|l_n - l\|$$

Soit alors $\varepsilon > 0$, prenons un n tel que $\|f - f_n\|_\infty + \|l_n - l\| < \frac{\varepsilon}{2}$, un tel n existe puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_\infty + \|l_n - l\| = 0$$

Pour ce n, $\lim_{p\to+\infty} f_n(x_p) = l_n$ et donc il existe p_0 tel que

$$\forall p \geqslant p_0, \|f_n(x_p) - l_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

On a

$$\forall p \geqslant p_0, \|f(x_p) - l\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ soit } \varepsilon$$

et donc $\lim_{x\to a} f(x) = l$. □

Exemple 36. *Considérons sur* $]1,+\infty($,

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$$

La convergence n'est pas normale ni uniforme sur $]1,+\infty($ *mais si* $a>1$, *de*

$$\forall x\geqslant a, \frac{1}{n^x}\leqslant\frac{1}{n^a} \text{ de série convergente}$$

on en déduit que la convergente est normale sur tout $[a,+\infty($, $a>1$. *En se plaçant sur* $[2,+\infty($ *par exemple, on peut écrire*

$$\begin{array}{ccc} \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^x} & \overset{x\to+\infty}{\rightrightarrows} & 1 \\ \downarrow_{n\to+\infty} & & \downarrow_{n\to+\infty} \\ \zeta(x) & \overset{x\to+\infty}{\rightrightarrows} & 1 \end{array}$$

Exemple 37. *Considérons* $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2x^2+1}$, *on cherche un équivalent de mfen* $+\infty$. *On a envie d'écrire*

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2x^2}=\frac{\pi^2}{6x^2}$$

Cela ne peut se faire aussi simplement. Considérons $x^2.f(x)$, *on veut monter*

$$\lim_{x\to+\infty}x^2.f(x)=\frac{\pi^2}{6}$$

Or

$$x^2.f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^2}{n^2x^2+1}$$

et

$$\forall x\in\mathbf{R}, 0\leqslant\frac{x^2}{n^2x^2+1}\leqslant\frac{1}{n^2} \text{ de série convergente}$$

la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^2}{n^2x^2+1}$ *converge donc normalement sur* $\mathbf{R}$ *(alors que la série définissant* $f(x)$ *ne converge pas en* 0*) et on peut écrire*

$$\begin{array}{ccc} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^2}{k^2x^2+1} & \overset{x\to+\infty}{\rightrightarrows} & \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2} \\ \downarrow_{n\to+\infty} & & \downarrow_{n\to+\infty} \\ x^2.f(x) & \overset{x\to+\infty}{\rightrightarrows} & \frac{\pi^2}{6} \end{array}$$

On a donc bien $f(x)\sim\frac{\pi^2}{6x^2}$

On en déduit également la propriété :

Proposition : Soit f_n une suite de fonctions continues sur D convergeant uniformément sur D vers f, alors f est continue sur D.

Preuve . La preuve est une conséquence directe du théorème précédent puisqu'en tout point $a\in D$, on a

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) & \overset{x\to a}{\rightrightarrows} & f_n(a) \\ \downarrow_{n\to+\infty} & & \downarrow_{n\to+\infty} \\ f(x) & \overset{x\to a}{\rightrightarrows} & f(a) \end{array}$$

et donc f continue en a. □

Remarque : La continuité étant une propriété locale, cela reste vrai en cas de convergence localement uniforme sur D ou de convergence sur tout compact de D lorsque E est de dimension finie.

(b) Intégration

On se placera ici dans le cas de fonctions à valeurs réelles ou complexes (bien que tout se généralise sans difficulté aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie) et à variable réelle définies sur un intervalle I. Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur I convergeant vers f. Peut on en déduire f intégrable sur I et a-t-on

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n = \int_I f$$

La question de l'intégrabilité de f nécessiterait de se placer dans un cadre précis de la théorie de l'intégration ce qui est hors de propos. On rappelle que toute fonction continue par morceaux où limite uniforme de fonctions continues par morceaux est intégrable sur un segment et que f est dite intégrable sur I ssi $\displaystyle\int_a^b |f|$ est borné pour tout segment $[a,b]\subset I$ cela indépendament de ce segment.

i. Cas de la convergence uniforme sur I

Tout repose sur la proposition suivante

Proposition : Si (f_n) converge uniformément vers f sur I borné (entre autres $I=[a,b]$) alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n = \int_I f$$

Preuve . On a

$$\left\|\int_I f_n - \int_I f\right\| \leqslant \text{longueur}\,(I)\,.\,\|f_n - f\|_\infty \to 0$$

d'où le résultat. □

Le résultat est faux si I non bornée, ainsi

Exemple 38. *Prenons* $f_n(x) = \frac{1}{n}.e^{-\frac{x}{n}}$ *sur* $[0,+\infty($, *on a* $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ *et* $f_n \overset{\|\ \|_\infty}{\to} 0$, *or*

$$\int_0^{+\infty} f_n = 1 \textit{ non convergeant vers } 0$$

Lorsque I n'est pas bornée, on a ce résultat, nécessitant la convergence uniforme sur tout segment de I

Proposition : Soit (f_n) intégrable sur I convergeant uniforment sur tout segment de I vers f et telle que il existe g intégrable telle que $\forall n\in\mathbf{N}, |f_n|\leqslant g$ alors f est intégrable et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n = \int_I f$$

Preuve . La convergence uniforme imposant la convergence simple, on a évidement

$$\forall x\in I, |f(x)|\leqslant g(x)$$

et donc f intégrable sur I (cf cours d'intégration).

Soit $\varepsilon>0$, il existe un segment $[a,b]\subset I$ tel que

$$\int_{I\setminus[a,b]} g < \varepsilon$$

On a donc puisque $|f_n|\leqslant g$ et $|f|\leqslant g$

$$\left|\int_{I\setminus[a,b]} f_n\right| < \varepsilon \text{ et } \left|\int_{I\setminus[a,b]} f\right| < \varepsilon$$

Or puisque la convergence est uniforme sur $[a, b]$, ce qui précède permet d'écrire que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

et donc $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

On obtient

$$\forall n \geqslant n_0, \left| \int_I f_n - \int_I f \right| \leqslant \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| + \left| \int_{I \setminus [a,b]} f_n \right| + \left| \int_{I \setminus [a,b]} f \right| < 3.\varepsilon$$

et le résultat. □

Ce dernier théorème, assez souvent suffisant dans la pratique, utilise une fonction g dominant la suite de fonction (f_n). Cette hypothèse de domination est en fait la plus importante et, si on se place dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, reste la seule hypothèse nécessaire. C'est le fameux théorème de convergence dominée, qui fait en fait partie d'un ensemble de 4 résultats pouvant être établis de façon assez élémentaire ([50]).

ii. Théorèmes de convergence dominée

Ces théorèmes, dont la démonstration est assez technique, ont été regroupés dans le premier paragraphe. Les lemmes nécessaires dans le deuxième paragraphe et les démonstrations proprement dites dans le troisème paragraphe.

A. Enoncé des 4 théorèmes

Ceux ci se regroupent par deux :

Deux résultats sur les suites de fonctions, l'un donnant une équivalence entre l'intégrabilité de la limite et la convergence de la suite des intégrables, le deuxième donnant une condition suffisante pour l'échange du signe intégrable et de la limite (théorème de la convergence dominée).

Théorème : Si (f_n) est une suite **croissante** de fonctions sur I quelconque, convergente simplement vers f avec les f_n et f localement intégrables, alors

$$f \text{ intégrable} \Leftrightarrow \left(\int_I f_n \right) \text{ majorée}$$

et dans ce cas

$$\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

Théorème : Si (f_n) est une suite de fonctions sur I convergente simplement vers f avec les f_n et f localement intégrables, et si il existe φ intégrable telle que $\forall n \geqslant 0, |f_n| \leqslant \varphi$ alors f intégrable sur I et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

Suivent deux autres résultats sur analogues portant sur les séries de fonctions.

[50] comprendre sans développer de théorie sophistiquée d'intégration

Théorème : Si (f_n) est une suite de fonctions intégrables positives sur I telles que la série

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge simplement vers } f$$

avec f localement intégrable alors

$$f \text{ intégrable sur } I \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 0} \int_I f_n \text{ convergente}$$

et dans ce cas

$$\int_I f = \sum_{n\geqslant 0} \int_I f_n$$

Théorème : Si (f_n) est une suite de fonctions intégrables sur I telles que la série

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge simplement vers } f \text{ et } \sum \int_I |f_n| \text{ converge}$$

avec f localement intégrable alors

$$f \text{ intégrable sur } I, \int_I |f| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \int_I |f_n| \text{ et } \int_I f = \sum_{n\geqslant 0} \int_I f_n$$

B. Preuve des théorèmes, résultats préliminaires

Les intégrales des fonctions se feront sur des ensembles qui ne seront pas toujours des segments mais inclus dans un segment. Si $A \subset J$, on a

$$\int_A f = \int_I 1_A.f \text{ avec } 1_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Les fonctions ainsi obtenues ne seront pas forcément continues par morceaux sur I mais réglées. Ces fonctions sont limites uniformes de suites de fonctions en escaliers.

Lemme : Si C est un compact et $(O_i, i \in I)$ une famille d'ouverts telle que

$$C \subset \cup_{i\in I} O_i$$

alors $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in C, \exists i_x \in I,]x-r, x+r[\subset O_{i_x}$

Preuve . Supposons que cela soit faux, il existe une suite $(x_n) \in C^{\mathbf{N}}$ telle que

$$\forall n \geqslant 0, \forall i \in I, \left]x_n - \frac{1}{n+1}, x_n + \frac{1}{n+1}\right[\not\subset O_i$$

La suite (x_n) admet une sous suite convergente vers un $x \in C$. x appartient à un O_{i_0} pour un i_0 appartenant à I. Il existe donc $r > 0$ tel que $]x-r, x+r[\subset O_{i_0}$. Prenons n tel que

$$\left|x_{\alpha(n)} - x\right| < \frac{r}{3} \text{ et } \frac{1}{n+1} < \frac{r}{3}$$

On a pour ce n, $\forall y \in \left]x_{\alpha(n)} - \frac{1}{n+1}, x_{\alpha(n)} + \frac{1}{n+1}\right[$,

$$|y-x| \leqslant \frac{1}{n+1} + \left|x_{\alpha(n)} - x\right| \leqslant \frac{2r}{3} < r$$

soit puisque $\frac{1}{\alpha(n)+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$

$$\left]x_{\alpha(n)} - \frac{1}{\alpha(n)+1}, x_{\alpha(n)} + \frac{1}{\alpha(n)+1}\right[\subset]x-r, x+r[\subset O_{i_0}$$

ce qui contredit

$$\forall n \geqslant 0, \forall i \in I, \left]x_n - \frac{1}{n+1}, x_n + \frac{1}{n+1}\right[\not\subset O_i$$

Cette dernière proposition est donc fausse, on en déduit bien que

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \forall x \in C, \exists i_x \in I,]x-r, x+r[\subset O_{i_x}$$

□

Lemme : Si $C \subset \cup_{x \in C}]x - \alpha_x, x + \alpha_x[$. alors il existe

$$\exists x_1, x_2, \cdots, x_p \in C, C \subset \cup_{i=1}^{p}]x_i - \alpha_{x_i}, x_i + \alpha_{x_i}[$$

Preuve . D'après le lemme précédent, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall y \in C, \exists x \in C,]y-r, y+r[\subset]x - \alpha_x, x + \alpha_x[$$

Montrons que

$$\exists y_1, \cdots, y_p \in C, C \subset \cup_{i=1}^{p}]y_i - r, y_i + r[$$

Si cela est faux, il existe une suite (y_n) telle que

$$\forall n \geqslant 0, y_{n+1} \notin \cup_{i=1}^{n}]y_i - r, y_i + r[$$

La suite (y_n) admet une valeur d'adhérence $y \in C$ avec $\left(y_{\beta(n)}\right)$ convergente vers λ. Or, d'après c-dessus, on a

$$\forall n \neq m, |y_n - y_m| \geqslant r$$

soit

$$\forall n \geqslant 0, \left|y_{\beta(n+1)} - y_{\beta(n)}\right| \geqslant r$$

or $\left|y_{\beta(n+1)} - y_{\beta(n)}\right| \to 0$. Cela prouve bien

$$\exists y_1, \cdots, y_p \in C, C \subset \cup_{i=1}^{p}]y_i - r, y_i + r[$$

Si x_i est tel que

$$]y_i - r, y_i + r[\subset]x_i - \alpha_{x_i}, x_i + \alpha_{x_i}[$$

on a bien

$$C \subset \cup_{i=1}^{p}]y_i - r, y_i + r[\subset \cup_{i=1}^{p}]x_i - \alpha_{x_i}, x_i + \alpha_{x_i}[$$

ce qu'il fallait prouver. □

Lemme : Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues sur un compact C (pas forcément un segment) convergeant simplement vers f continue, alors la convergence est uniforme.

Preuve . Soit $\varepsilon > 0$, pour $x \in C$, il existe

$$\alpha > 0, \forall y \in C \cap]x-\alpha, x+\alpha[, |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$n_x \geqslant 0, 0 \leqslant f(x) - f_{n_x}(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\alpha' > 0, \forall y \in C \cap]x-\alpha', x+\alpha'[, |f_{n_x}(y) - f_{n_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Posons $\alpha_x = \min(\alpha, \alpha')$ et considérons $y \in C \cap]x-\alpha_x, x+\alpha_x[$ et $n \geqslant n_x$, on a

$$0 \leqslant f(y) - f_n(y) \leqslant f(y) - f_{n_x}(y) \leqslant f(y) - f_{n_x}(x) + \frac{\varepsilon}{3}$$

soit

$$0 \leqslant f(y) - f_n(y) \leqslant f(x) - f_{n_x}(x) + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Soit

$$\forall n \geqslant n_x, \forall y \in C \cap]x-\alpha_x, x+\alpha_x[, |f(y) - f_n(y)| < \varepsilon$$

On a clairement $C \subset \cup_{x\in C}]x-\alpha_x, x+\alpha_x[$. D'après ce qui précède

$$\exists x_1, x_2, \cdots, x_p \in C, C \subset \cup_{i=1}^{p}]x_i - \alpha_{x_i}, x_i + \alpha_{x_i}[$$

Posons $N = \max(n_{x_i}, i = 1\cdots p)$, pour $n \geqslant N$, on a

$$\forall y \in C, \exists i \in \{1, \cdots, p\}, y \in]x_i - \alpha_{x_i}, x_i + \alpha_{x_i}[$$

et donc $|f(y) - f_n(y)| < \varepsilon$. On a donc bien

$$\forall n \geqslant N, \|f_n - f\|_{\infty, C} \leqslant \varepsilon$$

et (f_n) converge uniformémént vers f. □

Lemme : Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues par morceaux sur un segment J convergeant simplement vers f continue par morceaux sur J, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_J f_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_J f_n = \int_J f$$

Preuve . Quitte à travailler sur la suite $(f_n - f_0)$ convergeant vers $f - f_0$, on peut supposer f_0 positive et donc f_n et f positives.
f_n et f ont chacun un nombre fini de points de discontinuité. L'ensemble de ces points de discontinuité est donc au plus dénombrable. Soit $\mathcal{A} = \{c_n, n \in \mathbf{N}\}$ l'ensemble de ces points. Posons

$$I_\varepsilon = \cup_{n\in\mathbf{N}} \left] c_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, c_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right[$$

Sur J segment, f est majoré par un réel $M > 0$. La longueur de $]c_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, c_n + \frac{\varepsilon}{2^n}[$ est de $\frac{2.\varepsilon}{2^n}$. On a donc

$$\int_{J\cap\left(\cup_{n\in\mathbf{N}}]c_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, c_n + \frac{\varepsilon}{2^n}[\right)} f \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{J\cap]c_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, c_n + \frac{\varepsilon}{2^n}[} f \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2M\varepsilon}{2^n} \text{ soit } 4M\varepsilon$$

Comme $f_n \leqslant f$, on a également

$$\int_{J\cap\left(\cup_{n\in\mathbf{N}}]c_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, c_n + \frac{\varepsilon}{2^n}[\right)} f_n \leqslant 4M\varepsilon$$

Considérons $J' = J \backslash \cup_{n\in\mathbf{N}}]c_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, c_n + \frac{\varepsilon}{2^n}[$, J' est un fermé inclus dans un segment donc J' est compact. f et les f_n étant continues sur J', le lemme précédent affirme que (f_n) converge uniformémentvers f sur J' et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{J'} f_n = \int_{J'} f$$

Il existe donc n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \left| \int_{J'} f_n - \int_{J'} f \right| < \varepsilon$$

On a pour tout $n \geqslant n_0$

$$\left| \int_J f - \int_J f_n \right| \leqslant \left| \int_{J'} f_n - \int_{J'} f \right| + \int_{J\cap\left(\cup_{n\in\mathbf{N}}]c_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, c_n+\frac{\varepsilon}{2^n}[\right)} f_n + \int_{J\cap\left(\cup_{n\in\mathbf{N}}]c_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, c_n+\frac{\varepsilon}{2^n}[\right)} f$$

soit

$$\left| \int_J f - \int_J f_n \right| < (8M+1) . \varepsilon$$

On a donc bien

$$\lim_{n\to+\infty} \int_J f_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_J f_n = \int_J f$$

□

C. Preuve des théorèmes

Théorème : Si (f_n) est une suite **croissante** de fonctions sur I quelconque, convergente simplement vers f avec les f_n et f localement intégrables, alors

$$f \text{ intégrable} \Leftrightarrow \left(\int_I f_n \right) \text{ majorée}$$

et dans ce cas

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

Preuve . Là encore, quitte à travailler sur la suite $(f_n - f_0)$ convergeant vers $f - f_0$, on peut supposer f_0 positive et donc f_n et f positives.Pour tout segment $J \subset I$, $\int_J f_n \leqslant \int_J f$ donc f intégrable implique pour tout $J \subset I$ et tout n, $\int_J f_n \leqslant \int_I f$ et donc $\left(\int_I f_n \right)$ majorée par $\int_I f$.

Supposons $\left(\int_I f_n \right)$ majorée par M, montrons f intégrable. Montrons que si

$$L = \sup \int_I f_n = \lim_{n\to+\infty} \int f_n$$

alors pour tout segment $J \subset I$, $\int_J f$ est majoré par L. Supposons que sur un $J \subset I$

$$\int_J f > L$$

Soit $\delta = \int_J f - L$, sur J segment, d'après le lemme précédent,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_J f_n = \int_J f$$

donc il existe n_0 tel que $\int_J f_n \geqslant \int_J f - \frac{\delta}{2} \geqslant L + \frac{\delta}{2}$. Cela contredit bien $\left(\int_I f_n\right)$ majorée par L puisque

$$L < L + \frac{\delta}{2} \leqslant \int_J f_n \leqslant \int_I f_n$$

Donc pour tout $J \subset I, \int_J f$ est majorée par L. f est donc intégrable sur I et $\int_I f \leqslant L$. Le premier point du théorème est prouvé. Mais on peut alors noter que on doit avoir dans ce cas

$$\int_I f \leqslant L = \sup \int_I f_n = \lim_{n\to+\infty} \int f_n$$

et

$$\forall n \geqslant 0, \int_I f_n \leqslant \int_I f.$$

On en déduit

$$\int_I f = \sup \int_I f_n = \lim_{n\to+\infty} \int f_n$$

□

Théorème : Si (f_n) est une suite de fonctions intégrables positives sur I telles que la série

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge simplement vers } f$$

avec f localement intégrable alors

$$f \text{ intégrable sur } I \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 0} \int_I f_n \text{ convergente}$$

et dans ce cas

$$\int_I f = \sum_{n\geqslant 0} \int_I f_n$$

Preuve . Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite de fonctions

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

(g_n) est croissante puisque $f_n \geqslant 0$ et converge simplement vers f et la suite $\int_I g_n$ correspond à la série $\left(\sum_{k=0}^{n} \int_I f_k\right)$ convergente ssi majorée. le résultat en découle. □

Théorème : Si (f_n) est une suite de fonctions sur I convergente simplement vers f avec les f_n et f localement intégrables, et si il existe φ intégrable telle que $\forall n \geqslant 0, |f_n| \leqslant \varphi$ alors f intégrable sur I et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

Preuve . On a pour tout $n \geqslant 0, |f_n| \leqslant \varphi$ donc $|f| \leqslant \varphi$ et f intégrable. Montrons

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

Notons $g_n(t) = \sup_{k\geqslant n} |f_k(t) - f(t)|$, (g_n) converge vers 0 et (g_n) décroissante. De plus,

$$|g_n(t)| \leqslant 2\varphi(t)$$

donc, le théorème précédent donne $\lim \int_I g_n = 0$ et donc comme $|f_n - f| \leqslant g_n$

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \int_I f_n - \int_I f \right| = 0$$

et le résultat. □

Théorème : Si (f_n) est une suite de fonctions intégrables sur I telles que la série

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge simplement vers } f \text{ et } \sum \int_I |f_n| \text{ converge}$$

avec f localement intégrable alors

$$f \text{ intégrable sur } I, \int_I |f| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \int_I |f_n| \text{ et } \int_I f = \sum_{n\geqslant 0} \int_I f_n$$

Preuve . Posons

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \text{ et } h_n(x) = \inf(|f(x)|, g_n(x))$$

On a deux cas possibles pour un x donné,
• Soit $(g_n(x)) \to +\infty$ et $(h_n(x)) \to |f(x)|$
• Soit $(g_n(x))$ converge, mais dans ce cas, on a $|f(x)| \leqslant \lim g_n(x)$ et donc $(h_n(x)) \to |f(x)|$.
Donc dans tous les cas, (h_n) converge simplement vers $|f|$. Par construction la suite (h_n) est croissante et vérfie

$$\forall J \text{ segment}, J \subset I, \int_J h_n \leqslant \int_J g_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_J |f_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_I |f_k| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$$

On en déduit d'après le premier des théorèmes de ce chapitre que $|f|$ est intégrable sur I et

$$\int_I |f| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$$

Le même raisonnement appliqué à $\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n$ montre que

$$\int_I \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n \right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_I |f_n|$$

soit encore

$$\left| \int_I f - \sum_{n=0}^{N} \int_I f_n \right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_I |f_n| \text{ de limite 0 quand } N \to +\infty$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

□

D. Exemples

Premier exemple : Considérons

$$f_n(t) = \begin{array}{c} g(t) . \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \text{ si } t \in [0,n] \\ 0 \text{ si } t > n \end{array}$$

où g est une fonction telle que $g(t) . e^{-t}$ intégrable sur $[0, +\infty($, alors de

$$\forall n \geqslant 0, |f_n(t)| \leqslant |g(t)| . e^{-t}$$

on déduit de $\int_{[0,+\infty(} f_n = \int_0^n g(t) . \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n g(t) . \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} g(t) . e^{-t} dt$$

Deuxième exemple : Soit f continue positive décroissante à partir d'un certain $a > 0$ et intégrable sur $[0, +\infty($ alors

$$\forall h > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} h.f(nh) \text{ est convergente}$$

et

$$\lim_{h \to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} h.f(nh) = \int_{[0,+\infty(} f$$

En effet, posons pour $h \in]0,1[$

$$\varphi_h(t) = f\left(h. \left[\frac{t}{h}\right]\right)$$

φ_h est une fonction positive, et $\varphi_h \leqslant f$ sur $[a+1, +\infty($ puisque

$$a \leqslant t - 1 \leqslant h. \left[\frac{t}{h}\right] \leqslant t \text{ donc } \varphi_h(t) \leqslant f(t)$$

donc φ_h est intégrable sur $[0, +\infty($.

On a $\lim_{h \to +\infty} \varphi_h(t) = f(t)$ puisque f est continue.

Sur $[a+1, +\infty($, f intégrable majore $|\varphi_h|$, sur $[0, a+1]$, on a $|\varphi_h(t)| \leqslant \max_{t \in [0,a+1]} f(t)$.

Posons donc

$$g(t) = \begin{cases} f(t) \text{ si } t \leqslant a+1 \\ \max_{t \in [0,a+1]} f(t) \text{ si } t \in [0, a+1] \end{cases}$$

g est intégrable et g domine φ_h donc φ_h intégrable et

$$\int_{[0,+\infty(} \varphi_h = \sum_{n=1}^{+\infty} h.f(nh)$$

Soit (h_p) strictement positive convergeant vers 0, on a $\lim_{p \to +\infty} \varphi_{h_p}(x) = f(x)$, les p(ropriétés ci dessus permettent de prouver que

$$\lim_{p \to +\infty} \int_{[0,+\infty(} \varphi_{h_p} = \lim_{p \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} h_p.f(nh_p) = \int_{[0,+\infty(} f$$

On a donc bien

$$\lim_{h\to 0}\int_{[0,+\infty(}\varphi_{h_p}=\lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}h.f\left(nh\right)=\int_{[0,+\infty(}f$$

Troisième exemple : On veut étudier pour f continue sur $[0,1]$ la suite

$$I_n=\int_0^1\frac{n.f\left(t\right)}{1+n^2t^2}\,dt$$

On peut remarquer que $\frac{n.f(t)}{1+n^2t^2}$ converge simplement vers 0 sur $[0,1]$. Mais si

$$g\left(x\right)=\frac{xf(t)}{1+x^2t^2}$$

alors g C_∞ sur $\mathbf{R}$ et

$$g'\left(x\right)=-\frac{f(t)\left(-1+x^2t^2\right)}{\left(1+x^2t^2\right)^2}$$

g atteint son maximum en valeur absolue en $\frac{1}{t}$ et ce maximum vaut $\dfrac{\left|f\left(t\right)\right|}{2.t}$ non intégrable au voisinage de 0. Il semble donc difficile d'appliquer le théorème de convergence dominée.
Posons $u=nt$, on obtient

$$I_n=\int_0^n\frac{f\left(\frac{u}{n}\right)}{1+u^2}\,du$$

Si

$$g_n\left(u\right)=\begin{cases}\frac{f\left(\frac{u}{n}\right)}{1+u^2}\text{ sur }[0,n]\\ 0\text{ sur }]n,+\infty(\end{cases}$$

on a

- $\lim_{n\to+\infty}g_n\left(u\right)=\frac{f(0)}{1+u^2}$
- $\left|g_n\left(u\right)\right|\leqslant\frac{\|f\|_{\infty,[0,1]}}{1+u^2}$ intégrable

On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty}I_n=\int_0^{+\infty}\frac{f\left(0\right)}{1+u^2}\,du=\frac{\pi f\left(0\right)}{2}$$

iii. Autres normes
Il est impossible de donner des résultats généraux pour la convergence vis à vis de normes sur $\mathbf{R}^I$ ou $\mathbf{C}^I$. En fait le problème se résume à la continuité de l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{ccc}E\subset\mathbf{R}^I\text{ ou }\mathbf{C}^I&\to&\mathbf{R}\text{ ou }\mathbf{C}\\ f&\to&\displaystyle\int_I f\end{array}$$

pour la norme utilisée. Ainsi, cette continuité est claire pour la norme $N_1\left(f\right)=\displaystyle\int_I|f|$.
L'inégalité

$$\left|\int_I f\right|\leqslant\sqrt{\int_I 1}.\sqrt{\int_I|f|^2}\text{ soit }\sqrt{\text{longueur}\left(I\right)}.N_2\left(f\right)$$

donne cette continuité pour la norme $N_2\left(f\right)=\sqrt{\displaystyle\int_I|f|^2}$ lorsque I est borné. Par contre, posons

$$g_n\left(t\right)=\frac{1}{\left(t+1\right)^{1+\frac{1}{n}}}\text{ sur }[0,+\infty($$

on a

$$N_2(g_n) = \int_{[0,+\infty(} \frac{1}{(t+1)^{2+\frac{2}{n}}}\, dt \leqslant 1$$

et

$$\int_{[0,+\infty(} g_n = n \to +\infty$$

ce qui montre la non continuité de $f \to \displaystyle\int_{[0,+\infty(} f$ sur $L_2\,[0,+\infty($.

(c) Dérivabilité

L'exemple suivant montre qu'on ne peut espérer des résultats simple :

Posons $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ sur $\mathbf{R}$, $f_n(x)$ converge vers $|x|$ et

$$|f_n(x) - |x|| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leqslant \frac{1}{n} . \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \text{ soit } \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et donc $f_n \overset{\|\,\|_\infty}{\to} |x|$ sur $\mathbf{R}$. Or $f_n \in C_\infty(\mathbf{R})$ et $x \to |x|$ est non dérivable en 0.

En fait, le seul résultat important vient de la remarque que si $f_n \in C_1(I)$, alors

$$\forall x \in I, f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'$$

où $a \in I$ donné. Cela permet d'obtenir le théorème suivant

Théorème : Soit (f_n) une suite de fonctions C_1 sur I telle que il existe $a \in I$ tel que $f_n(a)$ converge et telle que (f_n') converge uniformément sur tout segment (compact) de I vers g. Alors (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers $f \in C_1(I)$ et $f' = g$.

([51])

Preuve . Comme (f_n') converge uniformément sur tout segment (compact) de I vers g donc sur $[a,x]$, on obtient que $f(a) = \lim_{n\to+\infty} f_n(a)$

$$\forall x \in I, f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n' \to f(a) + \int_a^x g$$

et cette fonction f est de classe C_1 sur I avec $f' = g$.

De plus soit $[b,c] \subset I$, posons $J = [\min(a,b,c), \max(a,b,c)]$, on a

$$\forall x \in [b,c], |f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(a) - f(a)| + \left|\int_a^x |f_n' - g|\right|$$

soit

$$\forall x \in [b,c], |f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(a) - f(a)| + \text{longueur}(J) . \|f_n' - g\|_{\infty,J} \to 0$$

et donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[b,c]$. □

Cela se généralise au théorème particulièrement utile suivant sur les suites de fonctions $C_\infty(I)$

Théorème : Soit (f_n) une suite de fonctions $C_\infty(I)$ telle que (f_n) converge vers f et $\forall p \geqslant 1$, $\left(f_n^{(p)}\right)$ converge uniformément sur tout segment de I vers g_p alors $f \in C_\infty(I)$ et $\forall p \geqslant 1, f^{(p)} = g_p$.

[51] Dans la pratique, on montre que f_n converge simplement sur I.

Preuve . Considérons

$$\mathcal{P}(p) \equiv f \in C_p(I) \text{ et } \forall k \in \{1, \cdots, p\}, f^{(k)} = g_k$$

Le théorème précédent permet de déduire $\mathcal{P}(1)$. Supposons $\mathcal{P}(p)$ acquis, Ce même théorème appliqué à $\left(f_n^{(p)}\right)$ convergeant vers g_p, permet de montrer $g_p \in C_1(I)$ et $g_p' = g_{p+1}$ soit $\mathcal{P}(p+1)$. D'où $\forall p \geqslant 1, \mathcal{P}(p)$ et le résultat. □

3. Exemple : Les séries entières

(a) Généralités.
Définition : On appelle séries entières une série de fonctions du type $\sum a_n.z^n$ où $a_n \in \mathbf{C}$. (a_n) est la suite des coefficients de la série entière. La série $\sum z^{2^n}$ est une série entieère avec

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 2^p \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On peut munir l'ensemble des séries entières d'une structure de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ algèbre à l'aide des opérations suivantes :
• Combinaison linéaire :

$$\lambda\left(\sum a_n.z^n\right) + \mu.\sum (b_n.z^n) = \sum (\lambda.a_n + \mu.b_n).z^n$$

• Produit de Cauchy

$$\left(\sum a_n.z^n\right).\left(\sum b_n.z^n\right) = \sum\left(\sum_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k}\right).z^n$$

Cela ne fait qu'étendre aux séries les opérations sur les polynômes.

(b) Convergence des séries entières

i. Rayon de convergence
La convergence des séries entières s'étudie assez simplement grace au lemme d'Abel. Celui ci se résume en
Lemme : Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $(a_n.z_0^n)$ est bornée, alors si $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Preuve . On a $|a_n.z^n| \leqslant \left|\frac{z}{z_0}\right|^n . \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n.z_0^n|$ de série absolument convergente puisque $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$. □
Il permet d'obtenir le théorème suivant établissant l'existence du rayon de convergence et ses caractéristiques :

Théorème : On a égalité entre les réels suivants en admettant $\inf \varnothing = +\infty$ et $\sup \varnothing = 0$ (dans $[0, +\infty()$

$$\begin{aligned} R_1 &= \sup\{|z|, (a_n.z^n) \text{ bornée}\} \\ R_2 &= \sup\left\{|z|, \sum a_n.z^n \text{ convergente}\right\} \\ R_3 &= \sup\left\{|z|, \sum a_n.z^n \text{ absolument convergente}\right\} \\ R_4 &= \inf\left\{|z|, \sum a_n.z^n \text{ divergente}\right\} \end{aligned}$$

Ce réel commun est appelé **rayon de convergence** de la série entière.

Preuve . On a clairement $R_3 \leqslant R_2 \leqslant R_1$. Le lemme précédent montre que si z est tel que $|z| < R_1$, il existe $|z'| > |z|$ tel que $(a_n.z'^n)$ bornée et donc, d'après le lemme, $\sum a_n z^n$ absolument convergente. On en déduit $R_1 \leqslant R_3$ puis

$$R_3 = R_2 = R_1$$

Soit z tel que $|z| < R_4, \sum a_n z^n$ converge et donc $|z| \leqslant R_2$ d'où $R_4 \leqslant R_2$. Si z est tel que $|z| < R_3$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente donc non divergente et

$$\left\{ |z| , \sum a_n.z^n \text{ divergente} \right\} \subset [R_3, +\infty($$

d'où $R_3 \leqslant R_4$ et l'égalité demandée. □
Si R est le rayon de convergence, on a entre autres

$$\forall z \in \mathbf{C}, |z| < R \Rightarrow \sum a_n.z^n \text{ absolument convergente}$$

et

$$|z| > R \Rightarrow \sum a_n.z^n \text{ divergente}$$

l'incertitude reste pour $|z| = R$.
Définition : Le disque de rayon R est appelé disque de convergence de la série entière.

ii. Opérations et rayon de convergence.
La somme de deux séries convergentes est convergentes, la somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente, on en déduit

Proposition : Le rayon de convergence de la somme de deux séries entières de rayon R_1 et R_2 est supérieur à $\min(R_1, R_2)$ et vaut $\min(R_1, R_2)$ si $R_1 \neq R_2$

De même, le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est absolument convergent et converge vers le produit des deux séries, on en déduit

Proposition : Le rayon de convergence du produit de Cauchy de deux séries entières de rayon R_1 et R_2 est supérieur à $\min(R_1, R_2)$

iii. Calcul du rayon de convergence.
Comme pour les séries absolument convergente, le calcul du rayon se fait sur la base de la comparaison des coefficients :

Proposition : Soit $\sum a_n.z^n$ et $\sum b_n.z^n$ deux séries entières de rayon respectif R_a et R_b. Alors

$$|a_n| \leqslant |b_n| \Rightarrow R_a \geqslant R_b$$

et de façon plus générale

$$\begin{cases} a_n = O(b_n) \Rightarrow R_a \geqslant R_b \\ |a_n| \sim |b_n| \Rightarrow R_a = R_b \end{cases}$$

Preuve . Cela vient juste des théorèmes de comparaisons des séries à termes positifs appliqués aux séries $\sum |a_n.z^n|$ et $\sum |b_n.z^n|$ avec $z \in \mathbf{C}$ donné. □
Mais cela est parfois insuffisant, ainsi on a la propriété suivante qui ne peut se prouver par simple comparaison

Proposition : Soit $\sum a_n.z^n$ de rayon R et $r \in \mathbf{C}(X)$ une fraction rationnelle non nulle, alors $\sum r(n).a_n.z^n$ est de rayon R.

Preuve . Le principe consiste à remarquer que si $|z| < R$ alors $\exists \rho < 1$ tel que $|a_n.z^n| = O(\rho^n)$, en effet, soit

$$z' = \frac{|z| + R}{2}$$

on a $|z| < |z'| < R$ et donc $|a_n.z'^n|$ est bornée. Comme $|a_n z^n| = |a_n.z'^n| . \left|\frac{z}{z'}\right|^n$ et que $\left|\frac{z}{z'}\right| < 1$, le résultat est acquis pour $\rho = \left|\frac{z}{z'}\right|$.
Pour $|z| < R$, on a donc $r(n).a_n.z^n = O(r(n).\rho^n)$ soit un $O(n^p.\rho^n)$ avec $p \in \mathbf{Z}$ de série convergente. Le rayon R' de $\sum r(n).a_n.z^n$ est donc $\geqslant R$. Comme $a_n = \frac{1}{r}(n).(r(n).a_n)$, on a également $R \geqslant R'$ et $R = R'$. □
Ce comportement géométrique incite à utiliser le critère de d'Alembert, effectivement fournit une méthode parfois très pratique pour évaluer le rayon comme l'illustre la proposition suivante.

Proposition : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $|a_n|$ soit non nul à partir d'un certain rang, alors si

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{ existe et vaut } l \text{ dans } [0,+\infty]$$

le rayon de la série est $R = \frac{1}{l}$.

Preuve . On a pour $z \neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}.z^{n+1}}{a_n.z^n}\right| = l.|z|$$

le critère de D'Alembert donne immédiatement la convergence pour $|z| < \frac{1}{l}$ et la divergence pour $|z| > \frac{1}{l}$. □

(c) Fonctions séries entières

i. Etude à l'intérieur du disque de convergence
Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon R, et soit $r < R$, on a

$$\forall z \in \bar{D}(0,r), |z| \leqslant r \text{ et donc } |a_n.z^n| \leqslant |a_n|.r^n$$

de série convergente. La série converge donc normalement sur $\bar{D}(0,r)$. On peut donc énoncer

Proposition : Une série entière de rayon R converge normalement sur tout **compact inclus dans le disque ouvert** de convergence

([52])
Cela permet de déduire

Proposition : Soit $f(z) = \sum a_n.z^n$ une série entière de rayon R, alors f est continue sur le disque **ouvert** de convergence.

Preuve . La convergence de la série de fonctions continues $a_n z^n$ est normale sur compact inclus dans le disque ouvert de convergence. □
De même, dans $\mathbf{R}$, si on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k.x^k$, les séries dérivées formelles p fois sont

$$S_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(k+p)!}{k!}.a_{k+p}.x^k = \sum_{k=0}^n A_{k+p}^k.a_k.x^k$$

séries entières de même rayon que la série $\sum a_n z^n$ puisque $n \to A_{n+p}^n$ est une fraction rationnelle en n (équivalente à n^p). On en déduit la convergence normale des séries dérivées sur tout compact de $]-R,R[$ où R est le rayon de $\sum a_n z^n$ et le théorème suivant :

Théorème : Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$ une série entière de rayon R, alors $S \in C_\infty(]-R,R[)$ et

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_{n+p}^n.a_{n+p}.x^n$$

[52] Mais pas sur $D(0,R)$ en général (erreur fréquente).

Remarque : On a $S^{(p)}(0) = A_p^0.a_p = p!.a_p$ soit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.x^n$$

La série entière est donc la série de Taylor de la fonction S.
On peut noter également que la fonction $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n}.x^n$ est, en suivant le même raisonnement une primitive de S sur $]-R, R[$.

ii. Etude sur le bord du disque de convergence.
Considérons la série

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.x^n$$

De rayon 1, elle est donc dérivable sur $]-1,1[$ et sa dérivée vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}.x^{n-1} = \dfrac{1}{1+x}$. On en déduit que

$$\forall x \in]-1,1[, S(x) = S(0) + \ln(1+x) = \ln(1+x)$$

Or il se trouve que $S(1)$ est défini. Si S est continue en 1, on pourra écrire

$$S(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} S(x) = \lim_{x \to 1} \ln(1+x) = \ln 2$$

Le problème général est soit une série entière $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon $R > 0$ convergeant en z_0 de module R, que peut-on dire de la fonction S au voisinage de z_0. En posant

$$T(u) = S(uz_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n.z_0^n).u^n$$

on peut se ramener au cas d'une série entière de rayon 1 convergente en 1. Les propositions suivantes se placent dans ce cadre et ont donc leur équivalent dans le cas général.
Soit donc une série entière $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.z^n$ de rayon 1 convergente en 1. Le problème est donc de savoir si

$$S(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} S(x)$$

voire, en se plaçant sur $\mathbf{C}$ une éventuelle continuité de la fonction en 1 ([53]). Dans la pratique, on peut envisager plusieurs cas de figure, les deux premiers, simples, recouvrant la plupart des cas courants.

A. $\sum a_n$ est une série absolument convergente
Dans ce cas, la majoration

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| \text{ de série convergente}$$

valable sur le disque fermé $\bar{D}(0,1) = \{z \in \mathbf{C}, |z| \leqslant 1\}$ montre que la convergence de la série entière est normale sur $\bar{D}$, S est donc continue sur $\bar{D}$ et donc en 1. On a bien entre autres

$$S(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} S(x)$$

[53] S peut être continue en 1 sur $[0,1]$ sans être continue en 1 en tant que fonction définie sur $D(0,1) \cup \{1\}$. C'est d'ailleurs le cas en général.

C'est par exemple le cas pour $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$, on a S de classe C_1 sur $]-1,1[$. La série $\sum\frac{1}{n^2}$ est absolument convergente donc $S(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}S(x)$. Or sur $]-1,1[$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=\frac{-1}{x}.\ln(1-x)$$

on en déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=S(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}S(x)=S(0)+\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\int_0^x S'=\int_0^1\frac{-\ln(1-t)}{t}\,dt$$

B. $\sum a_n$ est une série vérifiant le critère spécial des séries alternées
Autrement dit $|a_n|$ est décroissante convergent vers 0. Sur $[0,1]$, la série $\sum a_n.x^n$ vérifie également le critère spécial des séries alternées puisque $(-1)^n a_n.x^n$ est du signe de $(-1)^n.a_n$ donc de signe constant, et que $|a_n.x^n|$ décroit vers 0 en valeur absolue. On en déduit que

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_k.x^k-S(x)\right|\leqslant\left|a_{n+1}.x^{n+1}\right|\leqslant|a_{n+1}|$$

donc la série converge uniformément sur $[0,1]$ et S est continue en 1. On a bien

$$S(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}S(x)$$

Ainsi, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.x^n=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\ln(1+x)=\ln 2$$

C. Cas général
Supposons $\sum a_n$ convergente et posons $s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$, on peut écrire pour $|z|<1$

$$\sum_{k=0}^{n}a_k.z^k=\sum_{k=0}^{n}s_k.z^k-\sum_{k=0}^{n-1}s_k.z^{k+1}=s_n.z^n+(1-z).\sum_{k=0}^{n-1}s_k.z^k$$

soit puisque $\lim_{n\to+\infty}s_n.z^n=0$ (s_n convergente donc bornée et $|z|<1$), on obtient

$$S(z)=(1-z).\sum_{n=0}^{+\infty}s_n.z^n$$

Posons $s=\lim_{n\to+\infty}s_n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$, on a

$$s=(1-z).\sum_{n=0}^{+\infty}s.z^n$$

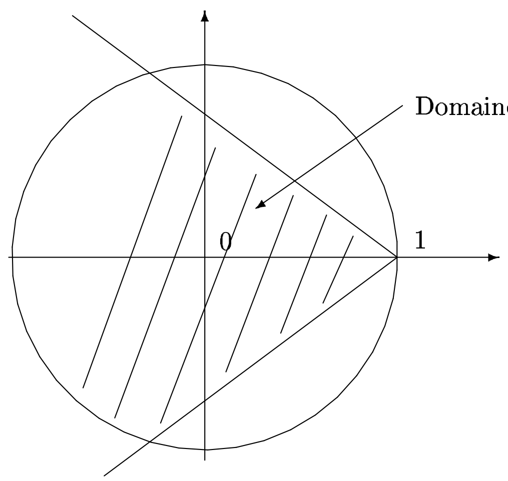
donc

$$|S(z)-s|=(1-z).\sum_{n=0}^{+\infty}(s_n-s).z^n$$

Soit $\varepsilon>0$, il existe n_0 tel que $\forall n\geqslant n_0,|s_n-s|<\varepsilon$, on peut écrire

$$\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty}(s_n-s).z^n\right|\leqslant\varepsilon.\frac{|z|^{n_0}}{1-|z|}\leqslant\frac{\varepsilon}{1-|z|}$$

donc
$$|S(z)-s| \leqslant |1-z| \,. \sum_{k=0}^{n_0-1} |s_n - s| + \varepsilon . \frac{|1-z|}{1-|z|}$$
Si $z = 1 - h.e^{i\theta}$, on a $|1-z| = h$ et
$$|z|^2 = (1-h.\cos\theta)^2 + h^2 . \sin^2\theta = 1 + h^2 - 2h.\cos\theta$$
donc
$$\frac{1}{1-|z|} = \frac{1+|z|}{1-1+2h.\cos\theta - h^2} \leqslant \frac{1}{h.\left(\cos\theta - \frac{h}{2}\right)}$$
Imposons, indépendament de ε, $|\theta| \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$ et $h < \cos\varphi$, on obtient
$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{\cos\varphi}$$
Finalement, dès que $z = 1 - h.e^{i\theta}$ avec $|\theta| \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$ et $h < \cos\varphi$, on a
$$|S(z)-s| \leqslant h. \sum_{k=0}^{n_0-1} |s_n - s| + \varepsilon . \frac{2}{\cos\varphi}$$
Comme
$$\lim_{h\to 0} h. \sum_{k=0}^{n_0-1} |s_n - s| = 0$$
il existe $h_0 > 0$ tel que $h < h_0$ implique
$$|S(z)-s| < \varepsilon . \left(1 + \frac{2}{\cos\varphi}\right)$$
et donc
$$\lim_{\substack{z\to 1 \\ |\arg(1-z)|\leqslant\varphi \\ |z|<1}} S(z) = s$$
où φ est un réel inférieur strictement à $\frac{\pi}{2}$. Ce théorème, connu sous le nom du théorème du Bec indique la continuité de S sur un "bec"dont la pointe est en 1, d'angle en 1 égal à $2\varphi < \pi$ comme l'illustre la figure ci-dessous :



Ce théorème est utilisé notamment dans le cas réel, on a dans ce cas $\varphi = 0$ et on obtient S continue sur $[0,1]$.

(d) Fonctions développable en série entière.

i. Généralités

La question est maintenant de savoir si une fonction donnée, par exemple $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ est une fonction série entière.

Définition : Une fonction f (à variable réelle x ou complexe z) sera dite développable en série entière ssi il existe un réel $\alpha > 0$ et une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon $R \geqslant \alpha$ telle que

$$\forall z \in \mathbf{C} \text{ (ou } \mathbf{R}\text{)},\ |z| < \alpha \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

on écrira

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,\ |z| < \alpha$$

Une telle fonction devra être continue sur un disque ouvert, de classe C_∞ sur un intervalle de type $]-\alpha, \alpha[$ si à variable réelle. On a vu que, de plus, que dans ce cas, on a $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Le développement en série entière, coïncidant avec la série de Taylor est donc unique.

Les théorèmes sur les opérations, dérivations, intégrations des séries entières permettent d'affirmer que

Proposition : La somme, le produit, la dérivée, et une primitve d'une fonction développable en série entière sera développable en série entière.

On peut remarquer que, à priori, on n'a aucun résultat sur la composition ou le quotient de telles fonctions. Ces résultats existent mais sont vu plutôt dans le cadre des fonctions analytiques.

ii. Cas des fractions rationnelles.

Le développement fondamental est celui de

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n\ ,\ |z| < 1$$

Si P est un polynôme, il est clair que P est développable en série entière.

Soit $a \in \mathbf{C}, a \neq 0$. De

$$\frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a}.\frac{1}{1-\frac{z}{a}}$$

On déduit $\frac{1}{z-a}$ développable en série entière et

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{a^{n+1}}.z^n\ ,\ |z| < |a|$$

Pour p un entier supérieur à 1, de

$$\frac{1}{(z-a)^p} = \frac{1}{z-a}.\cdots.\frac{1}{z-a}\ p \text{ fois}$$

on déduit $\frac{1}{(z-a)^p}$ développable en série entière et égal à son développement en série entière lorsque $|z| < |a|$. Il est peu pratique de faire le produit de Cauchy de ces développements. Par contre, connaissant son existence sur $\mathbf{C}$, on peut le calculer en se restreignant à $\mathbf{R}$ en remarquant que

$$\frac{1}{(x-a)^p} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}.\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(p-1)}$$

et donc

$$\frac{1}{(x-a)^p}=\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+p-1)!}{n!}.\frac{-1}{a^{n+1+p-1}}.x^n$$

Finalement

$$\frac{1}{(z-a)^p}=\sum_{n=0}^{+\infty}C_{n+p-1}^{n}.\frac{(-1)^p}{a^{n+p}}.z^n\ ,\ |z|<|a|$$

Or toute fraction rationnelle se décompose en éléments simples soit une partie entière polynômiale plus une combinaison linéaire de fractions de la forme $\frac{1}{(z-a)^p}$ avec a pôle de cette fraction rationnelle. On peut donc conclure

Théorème : Les fractions rationnelles n'admettant pas 0 comme pôle sont développables en série entière et sont égales à leur développement en série entière sur le disque ouvert de convergence, lequel est de rayon $\min\{|a|, a \text{ pôle de la fraction}\}$.

iii. Existence et calcul d'un développement en série entière

A. Par intégration, dérivation et opérations arithmétiques.
De ce qui précède, on déduit que toute fonction qui par intégration, dérivation et opérations arithmétiques peut se ramener à une ou plusieurs fractions rationnelles n'admettant pas 0 pour pôle est développable en série entière. C'est le cas pour $\arctan x$, $\arg\tan x$, $\ln(1+x)$, $\ln(r(x))$ avec r fraction rationnelle définie et non nulle en 0.

B. Par les séries de Taylor
Considérons la fonction $g(x)=e^{\frac{-1}{x^2}}$ avec $g(0)=0$. On montre aisément que $g\in C_\infty(\mathbf{R})$ et que $g^{(n)}(0)=0$. La série de Taylor de g, valant 0, est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$. Pourtant $g(x)\neq 0$ donc g n'est pas développable en série entière. Cependant on sait que si une fonction est développable en série entière, ce développement en série entière est la série de Taylor de la fonction. Il suffit donc de montrer que sur un intervalle $]-\alpha,\alpha[$, cette série de Taylor converge vers la fonction. Or les formules de Taylor nous donnent deux expressions du reste :

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k=\begin{cases}\frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}.x^{n+1} \text{ pour un } y\in[0,x]\\ \int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}.f^{(n+1)}(t)\ dt\end{cases}$$

Ainsi on peut on énoncer

Proposition : Si $f\in C_\infty(\mathbf{R})$ et si il existe pour tout $A>0$ une constante K_A telle que

$$\forall n\geqslant 0, \forall x\in[-A,A], \left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant K_A$$

alors f est développable en série entière et est égale à son développement en série entière sur $\mathbf{R}$.

Preuve . Soit $x\in[-A,A]$, on a

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k\right|\leqslant\frac{K_A}{(n+1)!}.|x|^{n+1}\to 0$$

d'où le résultat ([54]). □

Cela permet de montrer que les fonctions e^x, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, etc sont développables en série entière sur $\mathbf{R}$.

Plus sophistiqué, on peut également écrire

[54] Il est inutile de chercher à prouver une quelconque convergence normale ou uniforme.

Proposition : Si $f \in C_\infty\,]-1,1[$ et si il existe une fraction rationnelle r telle que

$$\forall n \geqslant 0, \forall x \in]-1,1[, \left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant r(n).n!$$

alors f est développable en série entière et est égale à son développement en série entière sur $]-1,1[$

Preuve . On écrit cette fois que

$$\forall x \in]-1,1[, \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k \right| \leqslant r(n+1).|x|^{n+1} \to 0$$

d'où le résultat. □

L'utilisation du reste intégrale est parfois nécessaire mais le plus souvent, la majoration de la dérivée $f^{(n+1)}$ sur le segment $[0,x]$ suffit pour montrer l'existence du développement en série entière.

C. Par utilisation d'une caractérisation (équation différentielle le plus souvent)

Une troisième méthode pour montrer qu'une fonction f est développable en série entière consiste à utiliser le raisonnement suivant :

• On trouve une propriété $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P}(g) \Rightarrow f = g$. Le plus souvent ce sera une équation différentielle avec des conditions initiales.

• On cherche une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon $R > 0$ telle $\mathcal{P}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)$.

On en conclut que f et la série entière coïncident sur le disque de convergence (ou sur $]-R,R[$)

Premier exemple : Ainsi considérons $f(x) = (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$. f est l'unique fonction $C_\infty\,]-1,1[$ vérifiant

$$\mathcal{P}(y) \equiv \begin{cases} (1+x).y' - \alpha.y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soit une série entière $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$ de rayon $R > 0$. On a

$$\begin{array}{l} g(0) = a_0 \\ (1+x).g'(x) - \alpha.g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1).a_{n+1} + (n-\alpha).a_n).x^n \end{array}$$

donc g vérifiera $\mathcal{P}(g)$ si et seulement si

$$a_0 = 1 \text{ et } a_{n+1} = -\frac{n-\alpha}{n+1}.a_n$$

ce qui définit une unique suite (a_n). Or, pour cette suite,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

donc la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$ est de rayon 1 et vérifie la propriété $\mathcal{P}$. On en déduit que $(1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et que les coefficients de son développement en série entière sont donnés par la suite vérifiant

$$a_0 = 1 \text{ et } a_{n+1} = -\frac{n-\alpha}{n+1}.a_n$$

Parfois le développement en série entière et son rayon s'obtiennent de façon plus compliqué. Ainsi, considérons **Deuxième exemple :** la fonction $\tan x$. Caractérisé par

$$\mathcal{P}(y) \equiv \begin{cases} y(0) = 0 \\ y' = 1 + y^2 \end{cases}$$

On obtient que la seule série entière vérifiant $\mathcal{P}(y)$ est $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$ avec a_n donné par

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 1, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n} a_k.a_{n-k}$$

Une récurrence simple montre que $\forall n \geqslant 0, a_n \in [0,1]$ et donc le rayon de la série entière est au moins de 1. On obtient donc

$$\tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n \ , \ |x| < 1$$

Mais la valeur 1 n'est pas optimal.
Cependant, sachant que $a_n = \dfrac{\tan^{(n)}(0)}{n!}$, on peut écrire pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\tan x = \sum_{k=0}^{n} a_k.x^k + \frac{\tan^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}.x^{n+1} \geqslant \sum_{k=0}^{n} a_n.x^n$$

puisque les dérivées de tan sont toutes positives sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, la série $\sum_{k=0}^{n} a_k.x^k$ est majorée indépendament de n par $\tan x$ et donc converge. Le rayon de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$ est donc au moins égal à $\frac{\pi}{2}$ et on peut écrire

$$\tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n \ , \ |x| < \frac{\pi}{2}$$

Le fait que $\tan x$ soit non borné au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ permet par ailleurs de conclure que tan ne peut coïncider avec une série entière de rayon R strictement supérieur à $\frac{\pi}{2}$ et donc que le rayon de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$ est exactement de $\frac{\pi}{2}$.

3. Espaces de Hilbert

3.1. Formes hermitiennes, espaces de Hilbert.

1. Produit hermitien

Dans ce qui suit, E est un K espace vectoriel ($K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).

Définition : On appelle forme hermitienne sur E une forme Φ de $E \times E$ vers K vérifiant

$$\begin{cases} \forall x_1, x_2, y \in E, \Phi(x_1 + x_2, y) = \Phi(x_1, y) + \Phi(x_2, y) \\ \forall x, y \in E, \forall \lambda \in K, \Phi(x, \lambda y) = \lambda.\Phi(x, y) \\ \forall x, y \in E, \Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)} \end{cases}$$

Exemple 39. *Pour $E = \mathbf{C}^n$, on définit*

$$\Phi(x, y) = \overline{X^t}.A.Y \text{ où } A \in M(n, \mathbf{C}), X = [x], Y = [y]$$

Φ ainsi définie est hermitienne si et seulement si A vérifie $\overline{A^t} = A$ soit $A^* = A$.

Exemple 40. *Pour $E = C_0[a, b]$, on définit $\Phi(f, g) = \int_a^b \overline{f}(t).g(t).h(t)\,dt$ est hermitienne dès que h est à valeurs réelles.*

On a $\forall x \in E$, $\Phi(x, .) \in E^*$, par contre $\Phi(., x)$ n'est pas linéaire lorsque $K = \mathbf{C}$ puisque vérifiant $\Phi(\lambda y, x) = \overline{\lambda}.\Phi(y, x)$.$\Phi(., x)$ est dite forme semi-linéaire sur E.

On peut déduire de $\Phi(x, x) = \overline{\Phi(x, x)}$ que $\Phi(x, x) \in \mathbf{R}$. Cela est à l'origine de la définition de la norme :

Définition : Une forme hermitienne sur E définit un produit scalaire dur E si et seulment si elle est définie positive i.e ssi

$$\begin{cases} \forall x \in E, \Phi(x,x) \geqslant 0 \text{ (positive)} \\ \forall x \in E, \Phi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0} \text{ (définie)} \end{cases}$$

On notera dans ce cas $\Phi(x,y) = x \mid y$ ou encore $x.y$.

Définition : Un espace muni d'un produit scalaire est dit préhilbertien, plus précisement :

- préhilbertien réel si $K = \mathbf{R}$
- euclidien si $K = \mathbf{R}$ et $\dim_K(E)$ finie
- préhilbertien complexe si $K = \mathbf{C}$
- hermitien si $K = \mathbf{C}$ et $\dim_K(E)$ finie

Exemple 41. *Dans l' exemple ci dessus, $\Phi(x,y) = \overline{X^t}.A.Y$ définit un produit scalaire ssi A est définie positive i.e ssi A a ses valeurs propres réelles positives non nulles.*

$\Phi(f,g) = \displaystyle\int_a^b \overline{f}(t).g(t).h(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $C_0[a,b]$ avec h continue ssi h positive et $\overbrace{\{x \in [a,b], h(x) = 0\}}^{\circ} = \varnothing$.

2. Norme euclidienne

Théorème : Soit $(x,y) \to x \mid y$ un produit scalaire sur E, alors

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbf{R} \\ x & \to & \|x\| = \sqrt{x \mid x} \end{array}$$

définit une norme sur E. On a de plus

$$\forall x,y \in E,\ |x \mid y| \leqslant \|x\|.\|y\| \text{ (Schwarz)}$$

Preuve . Par hypothèse, $\begin{cases} \forall x \in E, x \mid x \geqslant 0 \\ \forall x \in E, x \mid x = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0} \end{cases}$. Considérons pour $x, y \in E$

$$P(t) = (x+ty) \mid (x+ty)$$

On a

$$P(t) \geqslant 0 \text{ et } P(t) = x \mid x + t(x \mid y) + \bar{t}(y \mid x) + t.\bar{t}(y \mid y)$$

Soit θ l'argument dans $\mathbf{C}$ de $x \mid y$, posons $t = u.e^{-i\theta}$ où u réel, on a

$$P(t) = Q(u) = x \mid x + 2u.|x \mid y| + u^2.(y \mid y)$$

Le trinôme Q étant toujours positif et à coefficients réels, on en déduit que son discriminant est nul soit

$$(|x \mid y|)^2 - (x \mid x).(y \mid y) \leqslant 0$$

d'où $|x \mid y| \leqslant \|x\|.\|y\|$. Il en découle que $x \to \sqrt{x \mid x}$ est une norme sur E, l'inégalité triangulaire résultant de l'inégalité de Schwarz. □

Remarque : L'inégalité de Schwarz montre que l'application $\begin{array}{c} E \times E \to K \\ (x,y) \to x \mid y \end{array}$ est continue.

Proposition : Soit $x \to \|x\|$ une norme sur E, $\| \ \|$ sera une norme euclidienne (i.e dérivée d'un produit scalaire) ssi $\mid$ défini pour $x, y \in E$ par

$$x \mid y = \begin{cases} \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \text{ si } K = \mathbf{R} \\ \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i.\|x+iy\|^2 - i.\|x-iy\|^2}{4} \text{ si } K = \mathbf{C} \end{cases}$$

est un produit scalaire.

Proposition : Egalités remarquables :

- Parallélogramme : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2.\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$
- Médiane : $\|x-a\|^2 + \|y-a\|^2 = \frac{1}{2}.\|x-y\|^2 + 2.\left\|\frac{x+y}{2} - a\right\|^2$
- Pythagore : Si $x \mid y = 0$, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (La réciproque n'est vraie que lorsque $K = \mathbf{R}$.)

3. Espace de Hilbert

Définition : Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien de Banach.

Exemple 42. *$E = \mathbf{C}^n$ muni de $x \mid y = \sum_{i=1}^n \overline{x_i}.y_i$ est un espace de Hilbert.*

Exemple 43. *De même, considérons $E = l_2(\mathbf{N})$ l'espace des suites complexes de carrés sommables. Pour $u, v \in E$, posons*

$$u \mid v = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n}.v_n$$

On vérifie que E est un espace préhilbertien.

En effet, soit (u_p) une suite de E définie pour p donné par ses termes $u_{p;n}$. On suppose que (u_p) est de Cauchy. Montrons qu'elle converge dans E.
On a

$$\forall p, q \in \mathbf{N}, \|u_p - u_q\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{p,n} - u_{q,n}|^2$$

d'où

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall p, q \in \mathbf{N}, |u_{p,n} - u_{q,n}| \leqslant \|u_p - u_q\|$$

Pour n donné, la suite $(u_{p,n})_{p\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbf{C}$ donc convergente. Notons $v_n = \lim_{p\to+\infty} u_{p,n}$. La suite (v_n) appartient à E. En effet, pour tout entier N, on a

$$\sum_{n=0}^{N} |v_n|^2 = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} |u_{p,n}|^2$$

Or $\sum_{n=0}^N |u_{p,n}|^2 \leqslant \|u_p\|^2 \leqslant M$ puisque la suite (u_p) est de Cauchy donc bornée par un réel M. La série $\sum |v_n|^2$ est donc convergente et $(v_n) \in E$.
Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists q \text{ tel que } \forall p, p' \geqslant q,\ \ \|u_p - u_{p'}\|^2 < \varepsilon$$

Entre autres on a $\forall N \in \mathbf{N}, \forall p \geqslant q$

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_{p,n}|^2 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_{q,n}|^2 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} 2.|u_{p,n} - u_{q,n}|.|u_{q,n}| + |u_{p,n} - u_{q,n}|^2$$

soit comme

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} 2.|u_{p,n} - u_{q,n}|.|u_{q,n}| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} 2.|u_{p,n} - u_{q,n}|.|u_{q,n}| \leqslant 2\|u_p - u_q\|.\|u_q\|$$

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_{p,n}|^2 \leqslant \varepsilon + 2M\sqrt{\varepsilon} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_{q,n}|^2$$

On a d'autre part pour un $p \geqslant q$

$$\|u_p - v\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{p,n} - v_n|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_{p,n} - v_n|^2 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_{p,n}|^2 + |v_n|^2$$

soit

$$\|u_p - v\|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_{p,n} - v_n|^2 + \varepsilon + 2M\sqrt{\varepsilon} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_{q,n}|^2 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |v_n|^2$$

Les suites u_q *et* v *sont fixés une fois* ε *donné. Soit* N *tel que*

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_{q,n}|^2 < \varepsilon \text{ et } \sum_{n=N+1}^{+\infty} |v_n|^2 < \varepsilon$$

Pour ce N*, on a*

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} |u_{p,n} - v_n|^2 = 0$$

donc $\exists q'$ *tel que* $\forall p \geqslant q', \sum_{n=0}^{N} |u_{p,n} - v_n|^2 < \varepsilon$*. On obtient*

$$\forall p \geqslant \max(q, q'),\ \|u_p - v\|^2 \leqslant \varepsilon + \varepsilon + 2M\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon + \varepsilon \text{ soit } 4\varepsilon + 2M\sqrt{\varepsilon}$$

On a bien $\lim_{p\to+\infty} \|u_p - v\| = 0$*.* E *est bien complet. C'est un espace de Hilbert.*

Exemple 44. *On montre de même que* $L_2(I)$ *est un espace de Hilbert. La preuve est un peu plus compliquée et nécessite les outils de l'intégrale de Lebesgue..*
Soit (f_n) *une suite de Cauchy de* $L_2(I)$*. On a*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geqslant 0, \forall n, p \geqslant n_0, \|f_n - f_p\| < \varepsilon$$

où $\|f\| = \left(\int_I |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$*. On en déduit l'existence d'un suite extraite* $\left(f_{\alpha(n)}\right)$ *telle que*

$$\forall n \geqslant 0, \left\|f_{\alpha(n+1)} - f_{\alpha(n)}\right\| < \frac{1}{2^n}$$

Considérons $g_n = \sum_{k=0}^{n} \left|f_{\alpha(k+1)} - f_{\alpha(k)}\right|$ *et* $g = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|f_{\alpha(k+1)} - f_{\alpha(k)}\right| = \sup_{n\in\mathbf{N}} g_n$*. On peut écrire puisque la suite* (g_n) *est croissante,* $g = \lim_{n\to+\infty} g_n = \liminf_{n\to+\infty} g_n$

$$\int_I g^2 = \int_I \liminf_{n\to+\infty} g_n^2 \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_I g_n^2 \text{ soit } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

On en déduit que $g < +\infty$ *presque partout sur* I*, la série*

$$f_{\alpha(0)}(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} f_{\alpha(k+1)}(x) - f_{\alpha(k)}(x)$$

est donc absolument convergente presque partout sur I*. Soit* f *la limite de cette série. On a donc* $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_{\alpha(n)}(x)$ *et donc*

$$|f(x) - f_p(x)|^2 = \lim_{n\to+\infty} \left|f_{\alpha(n)}(x) - f(x)\right|^2 = \liminf_{n\to+\infty} \left|f_{\alpha(n)}(x) - f(x)\right|^2$$

Le lemme de Fatou permet d'écrire

$$\int_I |f - f_p|^2 \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \int_I \left| f_{\alpha(n)} - f_p \right|^2$$

soit d'une part $f - f_p \in L_2(I)$ *pour tout* p, *et donc* $f \in L_2(I)$,

$$\|f - f_p\| \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \left\| f_{\alpha(n)} - f_p \right\|$$

d'autrepart. Soit $\varepsilon > 0, n_0$ *tel que*

$$\forall n, p \geqslant n_0, \|f_n - f_p\| < \varepsilon$$

On obtient

$$\forall p \geqslant n_0, \|f - f_p\| \leqslant \varepsilon$$

et f *limite de* (f_n) *dans* $E = L_2(I), \|\ \|$

Exemple 45. *Prenons* $E = \mathbf{C}[X]$ *muni de*

$$P \mid Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n}.b_n$$

La suite

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

est de Cauchy mais ne converge pas, E bien que préhilbertien n'est pas de Hilbert.

3.2. Orthogonalité. E est un espace de Hilbert, on note $x \mid y$ le produit scalaire.

1. Relation d'orthogonalité

   Définition : Soit $x, y \in E$; $A, B \subset E$, on dit que

   - $x \perp y$ si et seulement si $x \mid y = 0$
   - $x \perp A$ si et seulement si $\forall y \in A$, $x \perp y$
   - $A \perp B$ si et seulement si $\forall y \in A$, $x \perp B$ soit ssi $\forall x \in A, \forall y \in B, x \perp y$

   Définition : Une famille de vecteurs est orthogonale si les vecteurs sont orthogonaux deux à deux. Elle est orthonormale si de plus les vecteurs sont de norme 1.

   Ainsi, dans $l_2(\mathbf{N})$ vu plus haut, la famille $\left\{ (\delta_n^p)_{n \in \mathbf{N}}, p \in \mathbf{N} \right\}$ est orthonormale.

Exemple 46. *Si* $E = D$ *espace des fonctions continues par morceaux,* 2π *périodique et vérifiant*

$$f = \frac{f^+ + f^-}{2}$$

muni de

$$f \mid g = \int_0^{2\pi} \bar{f}.g$$

(espace de Dirichlet ([55])), la famille $\left\{ t \to e^{int}, n \in \mathbf{Z} \right\}$ *est orthonormale, la famille* $\{t \to 1; t \to \cos(nt); t \to \sin(nt),$ *est orthogonale mais non orthonormée, on a pour* $n \geqslant 1, \|\cos(nt)\| = \|\sin(nt)\| = \frac{1}{2}$

Remarque : Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Proposition : Si $x \perp y$, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (la réciproque n'est vraie que si $K = \mathbf{R}$)

[55] voir le cours sur les séries de Fourier

2. Orthogonal d'une partie

Définition : Soit E un espace de Hilbert, $A \subset E$, on appelle orthogonal de A l'ensemble

$$A^{\perp} = \{x \in E, x \perp A\}$$

On notera $x^{\perp} = \{x\}^{\perp}$

Exemple 47.
• $\varnothing^{\perp} = \vec{0}^{\perp} = E$
• $E^{\perp} = \left\{\vec{0}\right\}$

Théorème : Si $A \subset E, A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel fermé de E

Preuve . On a $A^{\perp} = \cap_{x \in A} x^{\perp}$. Montrons que $\forall x \in E, x^{\perp}$ est un sous espace vectoriel fermé de E.
On a $x^{\perp} = \ker (x \mid .)$ avec $(x \mid .) \in E^*$ donc $x^{\perp}$ est un sous espace de E. Comme

$$\forall y \in E, |x \mid y| \leqslant \|x\| . \|y\|$$

$(x \mid .)$ est continue et $x^{\perp}$ est fermé. □

Proposition : (relations d'inclusion) On a

$$\begin{cases} A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp} \\ \bar{A}^{\perp} = \langle A \rangle^{\perp} = \overline{\langle A \rangle} = A^{\perp} \\ A, \bar{A} \text{ et } \langle A \rangle \subset A^{\perp\perp} \end{cases}$$

Preuve . La première inégalité est claire.
Comme A est inclus dans $\bar{A}$ et $\langle A \rangle$, on a $\bar{A}^{\perp}$ et $\langle A \rangle^{\perp}$ inclus dans $A^{\perp}$. Or si $x \in A^{\perp}$, $A \subset \ker (x \mid .)$ qui est un sous espace vectoriel fermé de E. Contenant A, il contient $\bar{A}$ et $\langle A \rangle$ d'où le résultat.
On a clairement $A \subset A^{\perp\perp}$. De $\bar{A}^{\perp} = \langle A \rangle^{\perp} = A^{\perp}$, on déduit le résultat. □

3.3. Projection.

1. Projection sur un convexe fermé

Théorème : Soit E un espace de Hilbert, C un convexe fermé non vide de E, pour tout x de E, il existe un unique point c de C vérifiant

$$\|x - c\| = d(x, C)$$

c est appelé projeté de x sur C et noté $p_C(x)$.

Preuve . Considérons $n \in \mathbf{N}$,

$$\exists y_n \in C,\ d(x, C)^2 \leqslant \|y_n - x\|^2 < d(x, C)^2 + \frac{1}{n+1}$$

Pour $n, m \in \mathbf{N}$, comme $z = \frac{1}{2}.(y_n + y_m) \in C$, on a

$$d(x, C) \leqslant \|x - z\|$$

or l'égalité de la médiane donne

$$\|x - z\|^2 = \frac{1}{2}.\left(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2 - \frac{1}{2}.\|y_n - y_m\|^2\right)$$

d'où
$$\|y_n - y_m\|^2 = 4.\left(\frac{1}{2}.\left(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2\right) - \|x-z\|^2\right)$$
soit
$$\|y_n - y_m\|^2 \leqslant 2.\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1}\right)$$
La suite (y_n) est de Cauchy donc convergente puisque E de Hilbert. C est fermé donc
$$c = \lim_{n\to+\infty} y_n \in C$$
c vérifie de plus
$$\|x-c\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \|x-y_n\|^2 = d(x,C)^2$$
d'où $\|x-c\| = d(x,C)$.(c est un projeté de x sur C).
Soit c' un autre projeté de x sur C, on a
$$\|c-c'\|^2 = 4.\left(\frac{1}{2}.\left(\|x-c\|^2 + \|x-c'\|^2\right) - \left\|x - \frac{c+c'}{2}\right\|^2\right) \leqslant 0$$
et donc $c = c'$. □

Proposition : $p_C(x)$ est l'unique point c de C vérifiant
$$\forall z \in C, \operatorname{Re}((x-c) \mid (z-c)) \leqslant 0$$

Preuve . Pour z et c dans C, posons
$$g(t) = \|x - (tz + (1-t)c)\|^2 - \|x-c\|^2$$
On a $c = p_C(x)$ si et seulement si
$$\forall z \in C, \forall t \in [0,1], \; g(t) \geqslant 0$$
Or
$$g(t) = \|c-z\|^2 .t^2 - 2\operatorname{Re}((x-c) \mid (z-c)).t$$
Donc g positive sur $[0,1]$ équivaut à
$$\forall t \in [0,1,], \; \|c-z\|^2 .t - 2\operatorname{Re}((x-c) \mid (z-c)) \geqslant 0$$
Soit $\operatorname{Re}((x-c) \mid (z-c)) \leqslant 0$ □

Remarque : On peut remarquer que cela entraîne en conservant les notations ci-dessus
$$\|x-z\|^2 = \|x-c\|^2 + \|c-z\|^2 - 2.\operatorname{Re}((x-c) \mid (z-c)) \geqslant \|x-c\|^2 + \|c-z\|^2$$

Théorème : L'application p_C de E vers E est 1-Lipschitzienne

Preuve . On a pour $x, y \in E$
$$\|p_C(x) - p_C(y)\|^2 = \|p_C(x) - x + x - y + y - p_C(y)\|^2$$
soit
$$\|p_C(x) - p_C(y)\|^2 = \|x-y\|^2 + \Delta$$
avec
$$\Delta = \|p_C(x) - x + y - p_C(y)\|^2 + 2.\operatorname{Re}(p_C(x) - x + y - p_C(y) \mid x - y)$$

soit comme

$$p_C(x) - x + y - p_C(y) \mid x - y = -\|p_C(x) - x + y - p_C(y)\|^2 + \cdots$$
$$\cdots p_C(x) - x + y - p_C(y) \mid p_C(x) - p_C(y)$$

$$\Delta = -\|p_C(x) - x + y - p_C(y)\|^2 + 2.\operatorname{Re}(p_C(x) - x + y - p_C(y) \mid p_C(x) - p_C(y))$$
$$\Delta \leqslant 2.\operatorname{Re}(p_C(x) - x \mid p_C(x) - p_C(y)) + 2.\operatorname{Re}(y - p_C(y) \mid p_C(x) - p_C(y)) \leqslant 0$$

et le résultat. □

Remarque : Si C contient au moins deux éléments x, y, on a pour ces deux éléments

$$\|p_C(x) - p_C(y)\| = \|x - y\|$$

et donc p_C n'est pas moins que 1 lipschitzienne.

2. Cas des sous espaces fermés

Les sous espaces de E sont clairement des convexes pour lesquels on pourra définir une projection lorsqu'ils seront fermés.

Proposition : Soit F un sous espace fermé de E, la projection orthogonale p_F de E sur F est linéaire continue. Elle est caractérisée pour $x \in E$ par

$$y = p_F(x) \Leftrightarrow y - x \perp F$$

Preuve . F étant convexe fermé, p_F est bien définie. Soit $x \in E$ et $y \in F$, on a

$$y = p_F(x) \Leftrightarrow \|y - x\| = d(x, F)$$

Si $y \in F$ vérifie $y - x \perp F$, on a d'aprés l'égalité de Pythagore

$$\forall z \in F, \|z - x\|^2 = \|z - y\|^2 + \|y - x\|^2 \geqslant \|y - x\|^2$$

puisque $z - y \in F$. On a donc $y - x \perp F \Rightarrow y = p_F(x)$.
Réciproquement, si $y = p_F(x)$, on a

$$\forall z \in F, \|z - x\|^2 \geqslant \|y - x\|^2$$

Soit $z \in F$, on a $t \in \mathbf{C}$,

$$\|(tz + y) - x\|^2 \geqslant \|y - x\|^2$$

d'où

$$|t|^2 . \|z\|^2 + 2.\operatorname{Re}(\bar{t}.(z \mid y - x)) \geqslant 0$$

Soit en prenant $t = u.e^{i \arg(z|y-x)}$ avec $u \in \mathbf{R}$

$$u^2. \|z\|^2 + 2u. |z \mid y - x| \geqslant 0$$

et donc $|z \mid y - x| = 0$ soit $y - x \perp F$.
On en déduit que

$$\forall x \in E,\ p_F(x) \in F \text{ et } x - p_F(x) \in F^{\perp}$$

d'où $F \bigoplus F^{\perp} = E$ et $p_F = p_{F\|F^{\perp}}$ projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$. Cela entraîne entre autres la linéarité de p_F. Sa continuité découle de la continuité des projections orthogonales. □

Remarque : La continuité des projections et le fait qu'elle soit au moins 1 lipschtzienne nous indiquent que soit $F = \left\{\vec{0}\right\}$ et $p_F = 0$, soit $F \neq \left\{\vec{0}\right\}$ et $\|p_F\| = 1$.

Théorème : Si F est un sous espace fermé de E, on a

$$F \bigoplus F^{\perp} = E \text{ et } F^{\perp\perp} = F$$

Preuve . De $F \cap F^{\perp} = \left\{\vec{0}\right\}$, on déduit $F \bigoplus F^{\perp}$. Le reste découle de $p_F = p_{F\|F^{\perp}}$. □

On a de façon générale lorsque $F \bigoplus G \bigoplus H = E$

$$p_{F\|G \bigoplus H} = p_{F\|G} \circ p_{F \bigoplus G\|H}$$

Cela permet d'écrire si G est un sous espace fermé de F lui même sous espace fermé de E, en notant p'_G la projection orthogonale si G dans le Hilbert F

$$p_G = p'_G \circ p_F$$

Cela se généralise au cas où G est un convexe fermé de F.

Théorème : Soit F un sous espace fermé de E, C un convexe fermé de F alors si p'_C est la projection dans le Hilbert F sur C, p_C est la projection dans le Hilbert E sur C et p_F la projection sur F dans E, on a

$$p_C = p'_C \circ p_F$$

([56])

Preuve . Remarquons que p'_C est la restriction de p_C à F. Soit $x \in E$, notons $x' = p_F(x)$, il s'agit de montrer $p_C(x) = p'_C(x')$ soit $p_C(x) = p_C(x')$. Notons $y' = p_C(x')$. Pour montrer $p_C(x) = y'$, il suffit de prouver $d(x, C) = \|x - y'\|$ soit puisque $y' \in C$, $d(x, C) \geqslant \|x - y'\|$.
Soit $z \in C$, on a

$$\|x - z\|^2 = \|(x - x') + (x' - z)\|^2 = \|x - x'\|^2 + \|x' - z\|^2$$

puisque $x - x' \perp x' - z$ ($x' - z \in F$ et $x - x' \in F^{\perp}$). Par définition de y', on a

$$\|x' - z\| \geqslant \|x' - y'\|$$

On peut donc écrire

$$\|x - z\|^2 \geqslant \|x - x'\|^2 + \|x' - y'\|^2 = \|x - y'\|^2$$

d'où

$$\forall z \in C, \|x - z\| \geqslant \|x - y'\| \text{ et donc } d(x, C) \geqslant \|x - y'\|$$

Cela prouve le résultat. □

3. Dual d'un Hilbert, hyperplans

   Nous avons vu que si f une forme linéaire, f est continue ssi l'hyperplan $H = \ker f$ est un fermé de E. Ce qui précède donne une relat ion entre un sous espace fermé et son orthogonal (de dimension 1 dans le cas d'un hyperplan). La réunion de ces résultats donne le théorème très important suivant qui permet d'identifier un Hilbert et son dual continu en associant une forme linéaire et un vecteur orthogonal à l'hyperplan qu'elle définit.

Théorème : Soit E un espace de Hilbert, l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E & \to & E' \\ a & \to & (a \mid .) \end{array}$$

est une isométrie. Plus précisement, si $f \in E'$, il existe $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E, f(x) = a \mid x$$

On a $\|a\| = \|f\|$ et $\ker f = a^{\perp}$

[56] ce théorème est parfois appelé théorème des perpendiculaires.

Preuve . Si $a \in E$, l'application $x \to (a \mid .)(x) = a \mid x$ est bien une forme linéaire. De

$$\forall x \in E, |(a \mid .)(x)| = |a \mid x| \leqslant \|a\| . \|x\| \text{ et}$$
$$|(a \mid .)(a)| = |a \mid a| = \|a\| . \|a\|$$

On déduit $\|(a \mid .)\| = \|a\|$. On a bien de plus $\ker (a \mid .) = a^{\perp}$.
Réciproquement, soit f une forme linéaire sur le Hilbert E, comme

$$f \in E' \text{ (i.e } f \text{ continue)} \Leftrightarrow H = \ker f \text{ est un fermé}$$

Ce qui précède indique que si H fermé, $H^{\perp} \bigoplus H = E$. Or $\dim_K H^{\perp} = 1$ donc il existe un vecteur x_0 tel que $H^{\perp} = \langle x_0 \rangle$. Soit alors $x \in E$, il existe $\lambda \in K$ tel que

$$x = p_H(x) + \lambda . x_0 \text{ car } x - p_H(x) \in H^{\perp}$$

d'où

$$f(x) = f(p_H(x)) + \lambda . f(x_0) = \lambda . f(x_0) \text{ d'une part}$$
$$x_0 \mid x = x_0 \mid p_H(x) + \lambda . (x_0 \mid x_0) = \lambda . \|x_0\|^2 \text{ d'autrepart}$$

Finalement

$$f(x) = \frac{x_0 \mid x}{\|x_0\|^2} . f(x_0) = a \mid x \text{ où } a = \overline{\frac{f(x_0)}{\|x_0\|^2}} . x_0$$

Un tel a est bien unique, soit $a, a' \in E$ convenant, on a

$$\|a\| = \|a'\| \text{ et } \forall x \in E, a \mid x = a' \mid x$$

d'où $a^{\perp} = a'^{\perp}$ donc $a^{\perp\perp} = a'^{\perp\perp}$ et a, a' colineaire. De $a \mid a' = a \mid a$ on déduit $a = a'$. □

Exemple 48.

• *Les formes linéaires continues sur $l_2(\mathbf{N})$ sont les formes linéaires données par*

$$(u_n) \to \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{v_n} . u_n$$

où $(v_n) \in l_2(\mathbf{N})$.

• *Les formes linéaires continues sur $E = L_2(I)$ sont les formes définies par*

$$\Lambda f = \int_I \bar{g} . f$$

avec $g \in L_2(I)$. ([57])

Remarque : De $((\lambda a + \mu b) \mid .) = \bar{\lambda}(a \mid .) + \bar{\mu}(b \mid .)$, on déduit la semi-linéarité de Φ et sa linéarité lorsque $K = \mathbf{R}$.

4. Sous espaces de dimension finie, application (Fourier)

   Les sous espaces de dimension finie de E sont des sous espaces fermés de E, si F est un tel sous espace de E et si B_F est une base de F, ce qui précède permet d'écrire

$$F^{\perp} = B_F^{\perp}$$

[57] Cela se généralise aux espaces $L_p(I), p \geqslant 1$. Si Λ est une forme linéaire continue sur $L_p(I)$, il existe $g \in L_q(I)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ tel que

$$\Lambda f = \int_I \bar{g} . f$$

Notons $B_F = (e_1, \cdots, e_n)$. Soit $x \in E,\ y = \sum_{i=1}^n y_i.e_i \in F,\ y = p_F(x)$ si et seulement si

$$y - x \perp B_F$$

soit

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, e_i \mid y = e_i \mid x$$

Notons $G = [e_i \mid e_j]_{j=1\cdots n}^{i=1\cdots n}$, on a $y = p_F(x)$ ssi

$$G. \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \mid x \\ \vdots \\ e_n \mid x \end{bmatrix}$$

Ce résultat est remarquable lorsque la base est orthonormée, on a alors $G = I_n$. Cela se traduit par la proposition

Proposition : Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie de E, $B_F = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de F, la projection orthogonale d'un vecteur x de E est donnée par

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n (e_i \mid x) .e_i$$

De $\|p_F\| = 1$, sachant la base orthonormée, on en déduit

Proposition : Sous les notations ci-dessus, on a

$$\|p_F(x)\|^2 = \textstyle\sum_{i=1}^n |e_i \mid x|^2 \leqslant \|x\|^2$$
$$d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \textstyle\sum_{i=1}^n |e_i \mid x|^2$$

Cela est important lorsque l'on considère une famille orthonormée de vecteurs $\{e_n, n \in \mathbf{N}\}$ ([58]) en appliquant ce qui précède aux espaces $F_n = \langle e_0, \cdots, e_n \rangle, n \in \mathbf{N}$. La projection d'un vecteur x de E sur F_n est le vecteur

$$s_n(x) = p_{F_n}(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x) .e_k \text{ avec } c_k(x) = e_k \mid x$$

Les coefficients $c_k(x)$ sont appelés coefficients de Fourier de x relativement à la famille $\{e_n, n \in \mathbf{N}\}$. Ils vérifient

$$\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^n |c_k(x)|^2 \leqslant \|x\|^2$$

On en déduit l'inégalité de **Bessel :**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(x)|^2 \leqslant \|x\|^2$$

Cela entraîne la convergence dans E de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x) .e_n$. En effet, on a

$$\|s_n(x) - s_{n+p}(x)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k(x)|^2$$

[58] Ou $\{e_n, n \in \mathbf{Z}\}$ (indexée sur $\mathbf{Z}$ et non sur $\mathbf{N}$) comme dans l'espace de Dirichlet

et $(s_n(x))$ est de Cauchy. Si $s = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x).e_n$, on a

$$s \in \overline{\cup F_n}\ , \forall n \in \mathbf{N},\ x - s \perp F_n \text{ et } \|x - s\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(x)|^2}$$

Si $\overline{\cup F_n} = E$, on déduit $s = x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x).e_n$. Tout cela est illustré dans la décomposition de Fourier des fonctions périodiques sur $\mathbf{R}$.

3.4. Exemple : Séries de Fourier d'une fonction 2π périodique. .

1. Espace de Dirichlet, coefficients de Fourier

On a vu que D espace des fonctions continues par morceaux, 2π périodique et vérifiant

$$f = \frac{f^+ + f^-}{2}$$

muni de

$$f \mid g = \int_0^{2\pi} \bar{f}.g$$

est un espace préhilbertien. Ce n'est pas un espace de Hilbert dans la mesure où il n'est pas complet. Cependant, il offre un cadre pratique.

Dans cet espace, la famille $\{t \to e^{int}, n \in \mathbf{Z}\}$ est orthonormale, la famille $\{t \to 1; t \to \cos(nt); t \to \sin(nt), n \geqslant 1\}$ est orthogonale mais non orthonormée, on a pour $n \geqslant 1$, $\|\cos(nt)\| = \|\sin(nt)\| = \frac{1}{2}$

Définition : Soit $f \in D$, on définit les coefficients de Fourier de f par

$$c_n(f) = e^{inx} \mid f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t).e^{-int}\, dt$$

$$a_n(f) = 2.(\cos nx \mid f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t).\cos nt\, dt$$

$$b_n(f) = 2.(\sin nx \mid f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t).\sin nt\, dt$$

On a immédiatement

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - i.b_n(f)}{2}\ ,\ c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + i.b_n(f)}{2}$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$$

et

$$b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

Appelons P_n l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur à n et P l'ensemble des polynômes trigonométriques, on a

$$P = \cup_{n \in \mathbf{N}} P_n = \langle e^{inx}, n \in \mathbf{Z} \rangle = \langle \cos nx, n \in \mathbf{N}\ ;\ \sin nx, n \geqslant 1 \rangle$$

la projection de f sur P_n est

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f).e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f).\cos kx + b_k(f).\sin kx$$

de norme

$$\|S_n(f)\| = \sqrt{\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2} = \sqrt{\frac{|a_0|^2}{2} + \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k(f)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |b_k(f)|^2\right)}$$

2. Propriétés des coefficients de Fourier, inégalité de Bessel.

   On peut déjà remarquer que les fonctions $f \to a_n(f), b_n(f)$ et $c_n(f)$ sont linéaires.

Proposition : (Bessel) Les séries $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(f)|^2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n(f)|^2$ convergent, on a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2$$

et

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2\right) \leqslant \frac{1}{2\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2$$

On peut en déduire des propriétés simples :

Proposition : Les coefficients de Fourier d'une fonction convergent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$ dans le cas de $c_n(f)$).

Par ailleurs, l'expression même des coefficients de Fourier permettent d'écrire

Proposition : Si $f \in D$, on a

$$|c_n(f)| \leqslant \|f\|_\infty \ , \ |a_n(f)| \leqslant \|f\|_\infty \ , \ |b_n(f)| \leqslant \|f\|_\infty$$

Cela nous donne en fait la continuité des applications $f \to a_n(f), b_n(f)$ et $c_n(f)$ pour la norme infinie.

Une propriété importante est le lien entre $c_n(f)$ et $c_n(f')$, si f est continue et de classe C_1 par morceaux, en posant

$$f'(x) = \frac{f'^{+}(x) + f'^{-}(x)}{2}$$

lorsque f non dérivable en x, une intégration par parties, possible puisque f continue, donne

$$c_n(f') = in.c_n(f)$$

soit encore

$$\forall n \geqslant 0, S_n(f') = S_n(f)'$$

On a de même

Proposition : Si $f \in D$ de classe C_{k-1} et C_k par morceaux, on a pour tout l compris entre 0 et k

$$c_n\left(f^{(l)}\right) = (in)^l.c_n(f)$$

soit

$$S_n\left(f^{(l)}\right) = S_n(f)^{(l)}$$

On en déduit comme $c_n\left(f^{(k)}\right) = o(1)$ quand $n \to \pm\infty$ que $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

Entre autres, si $k \geqslant 2$, la série

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f).e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f).\cos kx + b_k(f).\sin kx$$

est normalement convergente sur $\mathbf{R}$, les coefficients étant des $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Cela s'étend au cas $k = 1$ en remarquant que

$$\sum_{n=1}^{q} |c_n(f)| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{q} \frac{1}{n^2}\right).\left(\sum_{n=1}^{q} |n.c_n(f)|^2\right)} \leqslant \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right).\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f')|^2\right)}$$

et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|$ est convergente. Il en est de même de $\sum_{n=-1}^{-\infty} |c_n(f)|$, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|$ est convergente et $S_n(f)$ est normalement convergente. Il reste à montrer que dans ces cas elle converge vers f.

3. Théorèmes de convergence.

   Tout ce qui précède est général et pourrait s'appliquer à n'importe quelle famille orthonormée de D. Il nous reste à montrer que dans le cadre choisi, la série de Fourier d'une fonction caractérise cette dernière. Pour cela, il faut prouver que connaissant les coefficients de Fourier d'une fonction, on connait cette fonction.

   (a) Théorème de Parseval.

   Il n'est pas nécessaire pour cela que la série de Fourier converge simplement ou uniformément en tant que suite de fonctions. Nous avons vu qu chapitre précédent que dans l'espace préhilbertien D, la suite $(S_n(f))$ était une suite de Cauchy (conséquence de l'inégalité de Bessel). D à priori n'est pas complet (de Hilbert) donc on ne peut savoir si la suite converge. Le théorème de Parseval permet d'affirmer que cette suite converge vers f. Pour prouver cela, il suffit de montrer que $d(f, P_n)$ tend vers 0. On va donc construire pour $f \in D$ un polynôme trigonométrique Q_n de degré n tel que $\|f - Q_n\|$ converge vers 0. L'inégalité

$$\|f - Q_n\| \geqslant d(f, P_n) = \|f - S_n(f)\|$$

   permettra de conclure. Ce résultat repose sur le produit de convolution, particulièrement utile pour les approximations de fonctions :

   Lemme : Soit $f \in D$, on pose

$$Q_n(x) = \frac{1}{I_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \,.\, \left(\frac{1 + \cos(x - t)}{2}\right)^n dt$$

   avec

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos t}{2}\right)^n dt$$

   alors $\|Q_n - f\|$ converge vers 0 i.e (Q_n) converge vers f dans D

   Preuve . Remarquons que

$$Q_n(x) = \frac{1}{I_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \,.\, \left(\frac{1 + \cos x . \cos t - \sin x . \sin t}{2}\right)^n dt \in P_n$$

   et que puisque $\frac{1+\cos t}{2} \geqslant 0$ non identiquement nulle sur $[0, 2\pi]$, $I_n > 0$.
   Le changement de variable $u = x - t$ donne en remarquant que l'intégrale se fait sur un intervalle de longueur une période :

$$Q_n(x) = \frac{1}{I_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - u) \,.\, \left(\frac{1 + \cos u}{2}\right)^n du$$

   On peut noter que si M majore $|f|$ sur $\mathbf{R}$, on a

$$|Q_n(x)| \leqslant \frac{I_n}{I_n} . M \text{ soit } M$$

   Comme

$$f(x) = \frac{I_n}{I_n} . f(x) = \frac{1}{I_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,.\, \left(\frac{1 + \cos u}{2}\right)^n du$$

   on a

$$Q_n(x) - f(x) = \frac{1}{I_n} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x - u) - f(x)) \,.\, \left(\frac{1 + \cos u}{2}\right)^n du$$

Or par symétrie

$$\frac{I_n}{2}=\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n\ dt=\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n\ dt$$

donc

$$f\left(x\right)=\frac{f^{+}\left(x\right)+f^{-}\left(x\right)}{2}=\frac{1}{I_n}.\left(\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n.f^{+}\left(x\right)\ dt+\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n.f^{-}\left(x\right)\ dt\right)$$

et

$$Q_n\left(x\right)-f\left(x\right)=\frac{1}{I_n}.\left(\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n.\left(f\left(x-t\right)-f^{+}\left(x\right)\right)\ dt+\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n.\left(f\left(x-t\right)-f^{-}\left(x\right)\right)\ dt\right)$$

Soit $\varepsilon>0$, il existe $\alpha>0$ tel que

$$\forall t\in\left]0,\alpha\right[,\left|f\left(x-t\right)-f^{-}\left(x\right)\right|<\varepsilon \text{ et } \left|f\left(x+t\right)-f^{+}\left(x\right)\right|<\varepsilon$$

On obtient si M majore $|f|$ sur $\mathbf{R}$

$$\left|\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n.\left(f\left(x-t\right)-f^{+}\left(x\right)\right)\ dt\right|\leqslant\varepsilon.\frac{\int_{-\alpha}^{0}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n\ dt}{I_n}+2M.\frac{\int_{-\pi}^{-\alpha}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n\ dt}{I_n}$$

soit

$$\left|\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n.\left(f\left(x-t\right)-f^{+}\left(x\right)\right)\ dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2M.\frac{\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)^n}{I_n}$$

de même

$$\left|\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n.\left(f\left(x-t\right)-f^{-}\left(x\right)\right)\ dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2M.\frac{\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)^n}{I_n}$$

Finalement

$$\left|Q_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\leqslant\varepsilon+4M.\frac{\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)^n}{I_n}$$

Or on a

$$I_n=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n\ dt=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\frac{u}{2}\ du$$

soit

$$I_n\geqslant\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2.\cos^{2n}u\ du=4.\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}u\ du$$

finalement

$$I_n\geqslant 4.\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}u.\sin u\ du \text{ soit } \frac{4}{2n+1}$$

Donc

$$4M.\frac{\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)^n}{I_n}\leqslant\left(2n+1\right).M.\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)^n$$

de limite nulle. Il existe donc $n_0\in\mathbf{N}$ tel que

$$\forall x\in\mathbf{R},\forall n\geqslant n_0,\left|Q_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\leqslant 2.\varepsilon$$

Finalement

$$\lim_{n\to+\infty}Q_n\left(x\right)=f\left(x\right)$$

Comme $|Q_n(x) - f(x)|^2 \leqslant 4M^2$, le theorème de convergence dominée permet d'écrire

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |Q_n(x) - f(x)|^2 \, dx = 0$$

et donc (Q_n) convergente vers f dans D. □

On peut maintenant énoncer

Théorème : $(S_n(f))$ converge vers f dans D, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f) - f\| = 0$$

soit

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{|a_0|^2}{2} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2 \right) = \frac{1}{2\pi} . \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2$$

(égalité de Parseval)

Preuve . Comme on l'a vu plus haut

$$\|f - Q_n\| \geqslant d(f, P_n) = \|f - S_n(f)\|$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\| = 0$. Le reste en découle. □

Ce théorème est important car il permet d'affirmer la correspondance biunivoque entre les fonctions de D et leur série de Fourier. Il est à la source d'égalités importantes :

Exemple 49. *Pour $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ sur $]-\pi, \pi[$ 2π périodique, on obtient*

$$a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

En appliquant l'égalité de Parseval à $f(x) = e^{ax}$ sur $]-\pi, \pi[$ 2π périodique, on obtient

$$c_n = \frac{\sinh(a\pi)}{\pi} . \frac{(-1)^n}{a - in}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi a \sinh(2a\pi) - 2\sinh^2(a\pi)}{4a^2 \sinh^2(a\pi)}$$

La fonction $f(x) = e^{iax}$ sur $]-\pi, \pi[$ permet de calculer $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-a)^2}$

(b) Convergence uniforme de la série de Fourier

Une conséquence importante du théorème de Parseval est le théorème suivant :

Théorème : Si $f \in D$ est telle que sa série de fourier $(S_n(f))$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers une fonction g alors $f = g$.

Preuve . En effet, le théorème de Parseval permet d'affirmer que si $\forall n \in \mathbf{Z}, c_n(f) = c_n(g)$ alors $f = g$. Or, on a d'une part

$$\forall n \geqslant |p|, c_p(S_n(f)) = S_n(f) |e^{ipx} = c_p(f)$$

(puisque $S_n(f)$ est le projeté de f sur P_n), d'autre part

$$|c_p(S_n(f)) - c_p(g)| \leqslant \|S_n(f) - g\|_\infty \to 0$$

On en déduit $\lim_{n\to+\infty} c_p(S_n(f)) = c_p(g)$ puis $c_p(g) = c_p(f)$ et $f = g$. □
En gros, cela permet le "c'est d'autant plus vrai que ça marche" : Ainsi, pour la fonction $f(x) = \sqrt{|x|}$ sur $[-\pi, \pi]$ 2π périodique, les coefficents de Fourier sont

$$a_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

et

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{t}.\cos(nt)\ dt$$

soit

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi} \frac{\sqrt{u}.\cos(u)}{n^{\frac{3}{2}}}\ du$$

or

$$\int_0^{n\pi} \sqrt{u}.\cos(u)\ du = \left[\sqrt{u}.\sin u\right]_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\ du = -\int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\ du$$

convergeant vers $-\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\ du$ (soit $-\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$). On a donc $a_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et la série de Fourier converge normalement donc uniformément sur $[-\pi, \pi]$ et sur $\mathbf{R}$ (par 2π périodicité) et elle converge vers f, entre autres

$$\forall x \in [0, \pi], \sqrt{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi} \frac{\sqrt{u}.\cos(u)}{n^{\frac{3}{2}}}\ du\right).\cos nx$$

ou encore

$$\forall x \in [0, \pi], \sqrt{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{3} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{\pi\sqrt{u}}\ du\right).\cos nx$$

Un cas particulier est celui où f est continue et C_1 par morceaux, on a vu dans ce cas que la série $S_n(f)$ est normalement convergente. Ce qui précède permet de montrer que elle converge normalement vers f. Cela se résume en le théorème suivant utilisé dans la plupart des cas :

Théorème : Si f est continue, C_1 par morceaux et 2π périodique, la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

Cela peut être affiné au cas f lipschitzienne. En effet, supposons que f vérifie

$$\exists k \geqslant 0, \forall x, y \in \mathbf{R}, |f(x) - f(y)| \leqslant k.|x - y|$$

posons pour $h > 0$, $g(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$, $g \in D$ et

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.e^{-inx}\ dx$$

soit

$$c_n(g) = \frac{1}{4h\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h).e^{-inx}\ dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x-h).e^{-inx}\ dx\right)$$

et

$$c_n(g) = \frac{1}{4h\pi}\left(e^{inh}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x).e^{-inx}\ dx - e^{-inh}\int_{-\pi-h}^{\pi-h} f(x).e^{-inx}\ dx\right)$$

Finalement

$$c_n(g) = c_n(f).\frac{i\sin nh}{h}$$

Or la série $\sum |c_n(g)|^2$ est convergente vers $\frac{1}{2\pi}\int |g|^2$. De $|g| \leqslant k$, on déduit que

$$\forall h > 0, \forall p, q \geqslant 0, \sum_{n=-p}^{q} |c_n(g)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 \leqslant k^2$$

soit

$$\forall h > 0, \forall p, q \geqslant 0, \sum_{n=-p}^{q} \left|c_n(f) . \frac{i \sin nh}{h}\right|^2 \leqslant k^2$$

En faisant tendre h vers 0 (à p, q fixés, k étant indépendant de h), on a

$$\forall p, q \geqslant 0, \sum_{n=-p}^{q} n^2 . |c_n(f)|^2 \leqslant k^2$$

et la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 . |c_n(f)|^2$ est convergente. Là encore de

$$\sum_{n=1}^{q} |c_n(f)| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{q} \frac{1}{n^2}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{q} |n.c_n(f)|^2\right)}$$

on déduit $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|$ convergente ainsi que $\sum_{n=-1}^{-\infty} |c_n(f)|$, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|$ est convergente et $S_n(f)$ est normalement convergente vers f. On peut donc énoncer

Théorème : Si f est continue lipschitzienne, la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

(c) Convergence simple, théorème de Dirichlet

Il s'agit maintenant de dégager des conditions de convergence plus générale permettant d'obtenir non pas la convergence uniforme (irréalisable dès que f discontinue) mais la convergence simple. C'est le theorème de Dirichlet qui s'énonce comme suit :

Théorème : Si f est C_1 par morceaux (non forcément continue et 2π périodique, alors

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = f(x)$$

autrement dit, le développement de Fourier de f converge simplement vers f.

Avant de passer à la démonstration, on peut noter que le théorème ne dit pas "la série de Fourier converge vers f" mais "le **développement** de Fourier converge vers f". La raison est simple, prenons l'exemple de $f(x) = x$ sur $]-\pi, \pi[$ 2π périodique, on a successivement

$$c_0(f) = 0$$

et

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t.e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t.e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{i.(-1)^n}{n}$$

La série

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{i.(-1)^n}{n}.e^{inx}$$

ne converge pas en $x = \pi$ (c'est la série $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{i}{n}$ clairement divergente), par contre, la suite

$$S_N(x) = \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{i.(-1)^n}{n}.e^{inx}$$

valant 0 pour $x = \pi$ converge en ce point. La nuance disparait si on considère les coefficients (a_n) et (b_n) et si on considère $S_n(f)$ comme la série

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f).\cos kx + b_k(f).\sin kx$$

Preuve . La preuve est un peu similaire au théorème de Parseval : On fait apparaître $S_n(f)$ comme un produit de convolution avec une fraction trigonométrique et on montre la convergence simple en notant que l'égalité existe pour les fonctions constantes.

Etape 1 : Calcul de $\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$

On a

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = Q_n(x)$$

Etape 2 : Calcul de $S_n(f)(x)$

On a

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).e^{ik(x-t)}\,dt$$

soit

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\,dt$$

et donc

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).Q_n(x-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u).Q_n(u)\,du$$

par changement de variable $u = x - t$ en notant que les fonctions sont 2π périodiques et que l'intégrale se fait sur une période.

Etape 3 : Etude de Q_n. On peut noter que $S_n(1) = 1$ donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(u)\,du = 1$$

Q_n étant paire, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} Q_n(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} Q_n(u)\,du = \frac{1}{2}$$

Etape 4 (L'argument principal) : Si g est une fonction continue par morceaux sur $[-\pi,\pi]$, nulle en zéro, et admettant des dérivées à gauche et à droite, on a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{\sin\frac{x}{2}}.\cos\frac{x}{2} = 2.g'_d(0) \text{ et } \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)}{\sin\frac{x}{2}}.\cos\frac{x}{2} = g'_g(0)$$

La fonction $\frac{g(x)}{\sin\frac{x}{2}}$ est donc continue par morceaux sur $[-\pi,\pi]$. On peut écrire

$$g(x).Q_n(x) = \frac{g(x)}{\sin\frac{x}{2}}.\cos\frac{x}{2}.\sin nx + g(x).\cos nx$$

et donc si on appelle

$$h(x) = \frac{g(x)}{\sin\frac{x}{2}}.\cos\frac{x}{2}$$

on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t).Q_n(t)\ dt = \frac{1}{2}(b_n(h) + a_n(g))$$

(coefficients de Fourier) de limite nulle quand $n \to +\infty$.

Etape 6 : De

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(u)\ du = 1$$

on déduit

$$f(x) = \frac{f^+(x) + f^-(x)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f^+(x).Q_n(u)\ du + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f^-(x.)\,Q_n(u)\ du$$

Donc

$$f(x) - S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(f^+(x) - f(x-u)\right).Q_n(u)\ du + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f^-(x.) - f(x-u)\right).Q_n(u)\ du$$

soit

$$f(x) - S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u).Q_n(u)\ du$$

avec

$$g(u) = \begin{cases} f^+(x) - f(x-u) & \text{si } u \in]-\pi, 0[\\ f^-(x.) - f(x-u) & \text{si } u \in]0, \pi[\end{cases}$$

f étant de classe C_1 par morceaux, g est continue par morceaux et admet des dérivées à gauche et à droite en 0. On a donc d'après ce qui précède

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u).Q_n(u)\ du = 0$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) - S_n(f)(x) = 0$$

$(S_n(f))$ converge donc simplement vers f sur $\mathbf{R}$. □

On peut diminuer l'hypothèse C_1 par morceaux mais c'est cette version qui sert dans la pratique.

3.5. Conséquences, convexes dans un Hilbert.

1. Théorèmes de séparation

   Dans ce qui suit, $K = \mathbf{R}$, E est un espace de Hilbert réel. Les théorèmes de séparation s'interprètent géométriquement comme insérer un plan entre deux parties disjointes. Si ces deux parties sont des convexes, le résultat, intuitif en dimension finie, est beaucoup plus compliqué à prouver en dimension quelconque. Le cadre des espaces de Hilbert simplifie beaucoup les démonstrations.

Théorème : Soit C un convexe fermé de E et $x_0 \notin C$, il existe un hyperplan fermé **affine** H séparant strictement C et x_0, autrement dit, il existe $f \in E'$ et α réel tels que

$$\forall x \in C, f(x) > \alpha$$
$$f(x_0) < \alpha$$

Preuve . Considérons $y_0 = p_C(x_0)$, soit $a = y_0 - x_0$. On a

$$\forall y \in C,\ y_0 - y \mid a \leqslant 0$$

soit

$$y \mid a \geqslant y_0 \mid a$$

Or $x_0 - y_0 \mid a = -\|x_0 - y_0\|^2 < 0$ d'où $x_0 \mid a < y_0 \mid a$. Prenons

$$\alpha = \frac{x_0 \mid a + y_0 \mid a}{2}$$

On a bien

$$\forall y \in C, y \mid a > \alpha$$
$$x_0 \mid a < \alpha$$

f est donnée par $f = (. \mid a)$. □

Ce théorème admet plusieurs extensions :

(a) Extension en dimension finie au cas où x_0 est sur la frontière de C (séparation large).

Théorème : On suppose E de dimension **finie**. Soit C un convexe fermé et c appartenant à la frontière de C, il existe $f \in E'$ telle que

$$\forall y \in C, f(y) \geqslant f(c)$$

([59])

Preuve . Soit $(x_n) \in (E \backslash C)^{\mathbf{N}}$ convergeant vers c. D'après la démonstration du théorème précédent, si l'on pose

$$a_n = p_C(x_n) - x_n$$

On a

$$\forall y \in C, y \mid a_n > x_n \mid a_n$$

Soit si l'on pose

$$u_n = \frac{1}{\|a_n\|}.a_n$$

$$\forall y \in C, y \mid u_n > x_n \mid u_n$$

Or (u_n) est une suite vérifiant $\forall n \in \mathbf{N}, \|u_n\| = 1$. E étant de dimension finie sur $\mathbf{R}$, elle admet une valeur d'adhérence u de norme 1. Si $\left(u_{\alpha(n)}\right)$ converge vers u, de

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall y \in C, y \mid u_{\alpha(n)} > x_{\alpha(n)} \mid u_{\alpha(n)}$$

On déduit

$$\forall y \in C, y \mid u \geqslant c \mid u$$

□

(b) Extension au cas de deux convexes fermés dont l'un est compact (séparation stricte).

Théorème : Soit C et C' deux convexes fermés disjoints de E avec C compact, il existe $f \in E'$ et α réel tels que

$$\forall x \in C, f(x) < \alpha$$
$$\forall x \in C', f(x) > \alpha$$

[59] On dit que l'hyperplan $f(x) = f(c)$ sépare au sens large c et C

Preuve . D'après la continuité des applications distances, l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbf{R} \\ x & \to & d(x, C') \end{array}$$

est continue, elle atteint donc son minimum sur le compact C en un point $c \in C$. On a donc

$$d(C, C') = d(c, C') = \|c - c'\|$$

où $c' = p_{C'}(c)$. On a

$$\forall x \in C, \|x - c'\| \geqslant d(c', C) \text{ soit } \|x - c'\| \geqslant \|c - c'\|$$

On en déduit que c vérifie $\|c - c'\| = d(c', C)$ et donc $c = p_C(c')$. On a donc

$$c = p_C(c') \text{ et } c' = p_{C'}(c)$$

Posons $a = c - c'$.
De $c = p_C(c')$, on déduit

$$\forall y \in C,\ c - y \mid a \leqslant 0 \text{ soit } c \mid a \leqslant y \mid a$$

De $c' = p_{C'}(c)$, on déduit

$$\forall y' \in C',\ y' - c' \mid a \leqslant 0 \text{ soit } y' \mid a \leqslant c' \mid a$$

Or $c - c' \mid a = \|a\|^2 > 0$ d'où $c \mid a > c' \mid a$ et donc

$$\forall y \in C, \forall y' \in C', y' \mid a < y \mid a$$

$f = (. \mid a)$ convient. □

(c) Extension en dimension finie à deux convexes fermés (séparation au sens large)

Théorème : Soit C et C' deux convexes disjoints fermés de E de dimension **finie**, il existe $f \in E'$ et α réel tels que

$$\forall x \in C, f(x) \leqslant \alpha$$
$$\forall x \in C', f(x) \geqslant \alpha$$

Preuve . C et C' sont fermés, posons pour $n \in \mathbf{N}$, $C_n = C \cap \bar{B}\left(\vec{0}, n\right)$, C_n est un compact de E (de dimension finie) disjoints de C'. Il existe donc u_n que l'on peut prendre normé et α_n réel tels que

$$\forall x \in C_n, u_n \mid x < \alpha_n$$
$$\forall x \in C', u_n \mid x > \alpha_n$$

Soit

$$\forall x \in C_n, \forall x' \in C', x' \mid u_n \geqslant x \mid u_n$$

(u_n) admet une valeur d'adhérence u de norme 1 limite de $\left(u_{\beta(n)}\right)$. Soit $x \in C$ et $y \in C'$, pour $n \geqslant \|x\|$, on a $y \mid u_{\beta(n)} \geqslant x \mid u_{\beta(n)}$ d'où en passant à la limite

$$\forall y \in C', \forall x \in C,\ y \mid u \geqslant x \mid u$$

L'ensemble $\{x \mid u, x \in C\}$ est donc majoré, si $\alpha = \sup \{x \mid u, x \in C\}$, on a

$$\forall x \in C, x \mid u \leqslant \alpha$$
$$\forall y \in C', y \mid u \geqslant \alpha$$

□

2. Convexes et points extrémaux

(a) Points extremaux

Définition : Soit C un convexe, $x \in C$, x est dit point extremal de C ssi $x \notin \widehat{C \setminus \{x\}}$

Exemple 50. *Si $C = [a, b]$, les points extrémaux de C sont a et b. Si $C =]a, b[$, C n'a aucun point extrémal. Si $E = \mathbf{R}^2$ et $C = \bar{B}$, les points extrémaux de C sont $S = \{x \in E, \|x\| = 1\}$ si on prend la norme euclidienne et $\{(1,1); (1,-1); (-1,1); (-1,-1)\}$ si l'on prend la norme $\|(x,y)\| = \max(|x|, |y|)$*

Remarque : Si x point extrémal de C, alors $C \setminus \{x\}$ est convexe et x est non intérieur à C.

Théorème : Soit C un convexe et $x \in C$, alors

$$x \text{ extrémal} \Leftrightarrow \left(\forall x_1, x_2 \in C, x = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x = x_1 = x_2\right)$$

Preuve . Le sens direct est clair, si .$x = \frac{x_1+x_2}{2}$, x est barycentre positif de x_1 et x_2, si $x \neq x_1$, alors $x \neq x_2$ et $x \in \widehat{C \setminus \{x\}}$, x non extrémal.
Réciproquement, si x non extrémal,

$$\exists y_1, \cdots, y_p \in C \setminus \{x\}, \exists \alpha_1, \cdots, \alpha_p > 0, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1 \text{ et } x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i . y_i$$

On a $p > 1$ puisque $x \neq y_i$. Prenons

$$z_1 = y_1 \text{ et } z_2 = \frac{1}{\sum_{i=2}^{p} \alpha_i} . \sum_{i=2}^{p} \alpha_i . y_i$$

x est barycentre de (z_1, α_1) et $(z_2, 1 - \alpha_1)$, $\alpha_1 \neq 0$ et $z_1 \neq x$ entraîne $z_2 \neq x$. On a

$$x \in [z_1, z_2], x \neq z_1, x \neq z_2$$

Supposons $\alpha_1 > \frac{1}{2}$, on a

$$x = \alpha_1 . z_1 + (1 - \alpha_1) . z_2 = \frac{1}{2}(z_1 + z_3) \text{ où } z_3 = (2\alpha_1 - 1) . z_1 + 2(1 - \alpha_1) . z_2$$

$z_3 \in [z_1, z_2]$ et x milieu de deux points de C distincts de x. $\alpha_1 < \frac{1}{2}$ se traite de même, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ donne immédiatement le résultat. □

(b) Liens entre convexes et points extremaux

Une intersection de convexes est un convexe, donc l'intersection de tous les convexes contenant une partie X est un convexe et est le plus petit convexe contenant X. Ce convexe est appelé **enveloppe convexe** X et noté $\widehat{X}$. Le but est de trouver X minimal dont l'enveloppe donne un convexe C donné. Le théorèmes de séparation ainsi que les remarques suivantes permettent de résoudre le problème pour les convexes compacts.

Définition : On appelle demi espace ouvert (resp. fermé) les ensembles de la forme

$$H_\alpha = \{x \in E,\ f(x) < \alpha \text{ (resp. } f(x) \leqslant \alpha)\}$$

Proposition : Soit C un convexe fermé de E, alors

$$C = \bigcap_{H_\alpha \text{ contenant } C} H_\alpha$$

Les H_a étant des demi-espaces fermés.

Preuve . On a clairement $C \subset \underset{H_\alpha \text{ contenant } C}{\cap} H_\alpha$. Soit $x \notin C$, d'après les théorèmes de séparation, il existe $f \in E'$ et α réel tels que

$$\forall y \in C, f(y) > \alpha \text{ et } f(x) < \alpha$$

Considérons $H_\alpha = \{z \in E, f(z) \geqslant \alpha\}$, on a $C \subset H_\alpha$ et $x \notin H_\alpha$. On déduit de cela

$$C \supset \underset{H_\alpha \text{ contenant } C}{\cap} H_\alpha$$

et le résultat. □
Conséquence : Soit $A \subset E$, alors $\overline{\widehat{A}} = \underset{H_\alpha \text{ contenant } A}{\cap} H$

Théorème : (Krein-Milman) Soit C un convexe compact non vide de E, alors C est égal à l'adhérence de l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Preuve . Notons $X = \{x \in E, x \text{ point extrémal de } C\}$, il faut montrer $\overline{\widehat{X}} = C$.
Montrons $X \neq \varnothing$. Soit $a \in C$, l'application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \rightarrow & \|x - a\| \end{array}$$

est continue sur E et atteint son maximum sur le compact C. Soit b ce maximum, on a

$$\forall x \in C, \|b - a\| \geqslant \|x - a\|$$

Montrons $b \in X$. Soient $c, c' \in C$ tels que

$$b = \frac{c + c'}{2}$$

On a

$$2. \|b - a\|^2 + \frac{1}{2}. \|c - c'\|^2 = \|c - a\|^2 + \|c' - a\|^2$$

Comme $\|c - a\|$ et $\|c' - a\| \leqslant \|b - a\|$, on en déduit $\|c - c'\| = 0$ et $c = c' = b$. b est doncextrémal. $X \neq \varnothing$.
Notons $C' = \overline{\widehat{X}}$, on a $C' \subset C$. Supposons l'existence de $c \in C \backslash C'$. $c \notin C'$ donc d'après les théorèmes de séparation, il existe $f \in E'$ et α réel tels que

$$\begin{array}{c} \forall x \in C', f(x) > \alpha \\ f(c) < \alpha \end{array}$$

Posons $\beta = \min_{x \in C} f(x)$, β est bien définie puisque C est compact, de plus $\beta < \alpha$. Considérons

$$C_\beta = C \cap \{x \in E, f(x) = \beta\}$$

C_β est un convexe compact de E car intersection de deux convexes fermés dont un compact. Par définition de β, $C_\beta \neq \varnothing$. D'après ce qui précède, C_β admet un point extrémal d. Soient $d_1, d_2 \in C$ tels que

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

On a

$$\beta = f(d) = \frac{1}{2}. (f(d_1) + f(d_2)) \text{ avec } f(d_1) \geqslant \beta \text{ et } f(d_2) \geqslant \beta$$

On en déduit $f(d_1) = f(d_2) = \beta$ et d_1 et d_2 appartiennent à C_β. Or d est un point extrémal de C_β, on a donc $d_1 = d_2 = d$ et d point extrémal de C. D'où $d \in X$ et donc $d \in C'$. Or

$$\forall x \in C', \ f(d) = \beta < \alpha < f(x)$$

D'où une contradiction et $C = C'$. □

4. Plan détaillé

---

1. Espaces vectoriels Normés

1.1. Rappels des notions usuelles.

1. **R**
   (a) Le corps commutatif **R**
   (b) Ordre sur **R**
   (c) Complétude de **R**
   (d) Les convexes de **R**
2. Les complexes
3. Espace vectoriel
   (a) Sous espace vectoriel de E
      i. Opérations :
      ii. Dimension finie
   (b) Morphismes
   (c) Algèbre

1.2. Notion de norme.

1. Définition d'une norme
2. Exemples
   (a) normes sur **R** ou sur **C**
   (b) normes sur $\mathbf{R}^n$
   (c) normes sur $C_0\,[a,b]$ ou sur des espaces de fonctions
   (d) normes sur les polynômes et les suites
   (e) normes Euclidiennes

1.3. Suites.

1. Suites réelles
   (a) Suites, rappels
   (b) Définition de la convergence, lien avec la norme
   (c) Unicité de la limite, arithmétique des limites
   (d) Cas des suites monotones, des suites adjacentes
   (e) Généralisation à $\pm\infty$.
2. Suites dans un EVN
   (a) Définition de la convergence, lien avec la norme

   (b) Unicité de la limite, arithmétique des limites
   (c) Le problème du produit
   (d) Changement de normes, normes équivalentes
   (e) Cas de $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$.

3. Comparaison de suites
   (a) Cas des suites réelles ou complexes
   (b) Notations de Landau
   (c) Cas des suites à valeurs dans E. o et O d'une suite réelle

1.4. Manipulation des suites, critères de convergence.

1. Suites extraites
   (a) Définition des suites extraites
   (b) Construction de suite extraite
   (c) Théorème de Bolzano Weirstrass dans $\mathbf{R}$

2. Suite de Cauchy
   (a) Définition des suites de Cauchy
   (b) Propriétés des suites de Cauchy
   (c) Cas de $\mathbf{R}$, complétude de $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$ et des
   (d) Un exemple d'espace complet de dimension ∞
   (e) Un exemple d'espace non complet.

1.5. Topologie.

1. Topologie d'un espace
   (a) Boules, voisinages
   (b) Fermés, Ouverts
   (c) Adhérence d'un ensemble, point adhérent, Intérieur

2. Compacité, complétude
   (a) Sous ensemble complet d'un espace vectoriel normé
   (b) Compact au sens de Bolzano Weirstrass
   (c) Cas des espaces de dimension finie

1.6. Séries.

1. Séries
   (a) Définition des séries
   (b) Opérations sur les séries, combinaison linéaire
   (c) Convergence des séries
   (d) Application du critère de Cauchy, convergence absolue
   (e) Produit dans une algèbre

2. Séries à termes positifs

(a) Principe de comparaison
(b) Application. Etude de $\sum u_n$ avec $u_n = O(v_n)$
  i. Série de Cauchy
  ii. Série de Riemann
  iii. Série de Bertrand
(c) Critère de D'Alembert

3. Série de termes quelconques

(a) Généralités
(b) Cas des séries alternées, sommation d'Abel
(c) Comparaison série intégrale

2. Topologie, application à $\mathbf{R}$

2.1. Généralités sur les limites de fonctions.

1. Applications continues

(a) Limites de fonctions en un point suivant une partie $A \subset E$
(b) Fonctions continues
(c) Prolongement par continuité
(d) Homéomorphismes
(e) Continuité uniforme

2. Comparaison de fonctions en un point adhérent aux domaines

(a) Fonctions numériques
(b) Notations de Landau

2.2. Cas des applications linéaires.

1. Généralités, caractérisation de la continuité
2. Triple norme, Espace $L_{K,c}(E,F)$
3. Isomorphismes d'espaces normés
4. Applications multilinéaires continues

2.3. Application aux fonctions numériques.

1. Fonctions numériques
2. Continuité

(a) Théorème des valeurs intermédiaires.
(b) Fonctions monotones. Caractérisation des homéomorphismes sur un
(c) Image d'un segment

3. Dérivabilité

(a) Taux d'accroissement, dérivée
(b) Propriétés des dérivées

(c) Composition

i. Composition de $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ avec $g : J \subset \mathbf{R} \to E$.
ii. Composée de $f : I \subset \mathbf{R} \to E$ avec $g : E \to F$ linéaire.
iii. Composée de $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ avec $g : J \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ particulière.
iv. Difféomorphisme

(d) Théorème de Rolle, accroissements finis (spécifique à $\mathbf{R}$)

i. Extremum intérieur d'une fonction.
ii. Conséquences

4. Dérivées d'ordre supérieur

(a) Définition, propriétés
(b) Formule de Taylor

i. Lemme préliminaire, généralisation du théorème de Rolle
ii. Principe
iii. Série de Taylor, Formules de Taylor

5. Fonctions convexes

(a) Définition des fonctions convexes
(b) Opérations sur les fonctions convexes
(c) Extremum des fonctions convexes
(d) Régularité des fonctions convexes sur un intervalle
(e) Généralisation.

2.4. Suites de fonctions.

1. Type de convergences

(a) Convergence simple.
(b) Convergence uniforme
(c) Variante de la convergence uniforme

i. Convergence uniforme sur tout compact
ii. Convergence normale

(d) Convergence pour une norme

2. Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

(a) Continuité et limites.

i. Cas de la convergence simple
ii. Cas de la convergence uniforme.

(b) Intégration

i. Cas de la convergence uniforme sur I
ii. Théorèmes de convergence dominée

A. Enoncé des 4 théorèmes
B. Preuve des théorèmes, résultats préliminaires
C. Preuve des théorèmes
D. Exemples

(c) Dérivabilité

3. Exemple : Les séries entières
   (a) Généralités.
   (b) Convergence des séries entières
      i. Rayon de convergence
      ii. Opérations et rayon de convergence.
      iii. Calcul du rayon de convergence.
   (c) Fonctions séries entières
      i. Etude à l'intérieur du disque de convergence
      ii. Etude sur le bord du disque de convergence.
         A. $\sum a_n$ est une série absolument convergente
         B. $\sum a_n$ est une série vérifiant le critère spécial des séries alternées
         C. Cas général
   (d) Fonctions développable en série entière.
      i. Généralités
      ii. Cas des fractions rationnelles.
      iii. Existence et calcul d'un développement en série entière
         A. Par intégration, dérivation et opérations arithmétiques.
         B. Par les séries de Taylor
         C. Par utilisation d'une caractérisation (équation différentielle le plus souvent)

3. Espaces de Hilbert

3.1. Formes hermitiennes, espaces de Hilbert.

1. Produit hermitien
2. Norme euclidienne
3. Espace de Hilbert

3.2. Orthogonalité.

1. Relation d'orthogonalité
2. Orthogonal d'une partie

3.3. Projection.

1. Projection sur un convexe fermé
2. Cas des sous espaces fermés
3. Dual d'un Hilbert, hyperplans
4. Sous espaces de dimension finie, application (Fourier)

3.4. Exemple : Séries de Fourier d'une fonction 2π périodique. .

1. Espace de Dirichlet, coefficients de Fourier
2. Propriétés des coefficients de Fourier, inégalité de Bessel.
3. Théorèmes de convergence.
   (a) Théorème de Parseval.
   (b) Convergence uniforme de la série de Fourier
   (c) Convergence simple, théorème de Dirichlet

3.5. Conséquences, convexes dans un Hilbert.

1. Théorèmes de séparation
   (a) Extension en dimension finie au cas où x_0 est sur la frontière de C (séparation large).
   (b) Extension au cas de deux convexes fermés dont l'un est compact (séparation stricte).
   (c) Extension en dimension finie à deux convexes fermés (séparation au sens large)
2. Convexes et points extrémaux
   (a) Points extremaux
   (b) Liens entre convexes et points extremaux